

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

24. Band, Heft 2

5. Mai 1941

S. 49—96

Geschichtliches.

Frajese, Attilio: *Introduzione allo studio degli elementi di Euclide.* Period. Mat., IV. s. 20, 137—154 (1940).

Die hier gegebene Einführung in die Elemente schließt sich der Auffassung an, die der von Enriques herausgegebenen Euklidübersetzung zugrunde liegt. Geschichtliches wird zunächst im allgemeinen nach Proklos geboten, dabei aber der von diesem nicht genannte Demokrit in seiner Bedeutung hervorgehoben. Die Entwicklung, die durch die Eleatische Kritik primitiver Vorstellungen der Pythagoreer zu der Verfeinerung der Begriffe und Methoden, besonders durch Eudoxos führte, wird skizziert, ohne daß etwa auf die Entwicklungsgeschichte des Irrationalen näher eingegangen würde; nur Zeuthen wird dafür zitiert. Weiter geht Verf. nach einer Übersicht über den Inhalt des ganzen Werkes auf die dem I. Buch vorangeschickten Definitionen, Postulate und Axiome ein, greift dabei einzelnes heraus, wie die Definition der Figur, die die Abneigung gegen das Unendliche erkennen läßt, und die des Winkels, die noch Spuren der früher häufigeren Benutzung krummliniger Winkel zeigt. Die Definitionen erklären Objekte, deren Existenz durch Konstruktion bewiesen werden muß; in der Auffassung der Postulate schließt Verf. sich Zeuthen an. Von den Axiomen wird der Satz, daß einander Deckendes einander gleich ist, wegen seines Zusammenhanges mit der Bewegung hervorgehoben. Zweck des Aufsatzes ist weniger, Neues zu bringen, als aus dem Bekannten zusammenzustellen, was die Anfangsschwierigkeiten der Euklidlektüre überwinden hilft; die Zusammenstellung ist wertvoll. *Thaer* (Detmold).

Huber, A.: Philipp Furtwängler †. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 167—178 (1940).

Biographie mit Schriftenverzeichnis.

H. Geppert (Berlin).

Blaschke, Wilhelm: Hermann Brunn †. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 163—166 (1940).

Biographie mit Schriftenverzeichnis.

H. Geppert (Berlin).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Deltheil, Robert: *Les lois du hasard et leur importance dans la science et la vie modernes.* Mat. element., Madrid 1—10 (1939).

Es handelt sich um eine Vorlesung, in der einfach und sehr klar die elementaren und klassischen Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslehre dargestellt werden, so wie sie sich geschichtlich entwickelt haben und wie sie heute in der Statistik, Biometrie, Versicherungslehre usw. angewendet werden. — Im letzten Teile der Arbeit untersucht Verf. den Begriff des statistischen Gesetzes, wie er vor allem von Gibbs begründet wurde, und der die wesentliche Funktion des Kausalitätsprinzips aus der Wissenschaft zu verdrängen scheint.

Octav Onicescu (Bukarest).

Fréchet, M.: Sur quelques idées modernes dans la théorie des probabilités. Acta Univ. Asiae Med. Taschkent, Ser. V-a Math. Fasc. 32, 1—7 (1939).

Seinen, am Osloer Kongreß 1936 gehaltenen Sektionsvortrag veröffentlichend, trachtet Verf. zu zeigen, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung sich zur Zeit nicht in einer Revolution, sondern in einer raschen Evolution befindet, eine Meinung, die sicherlich widerspruchsfreie Annahme bei allen findet, die die Notwendigkeit einer fortschreitenden Entwicklung sowohl im Ober- als auch im Unterbau jeder mathematischen Disziplin anerkennen. Verf. scheint der Ansicht zu sein, daß die von Mises'sche Theorie selbst bei dieser Auffassung kaum aufrechterhalten ist, da sie durch die Beschränkung auf Folgen von Versuchsergebnissen mit zu Grenzwerten strebenden relativen Häufigkeitswerten bereits prinzipiell äußerst beengt und durch immer weitere, die Anpassung an Folgen von zufälligen Ereignissen bezweckende Forderungen in eine Sackgasse getrieben wird. — Der Zentralbegriff der Theorie ist dem Verf. nach jener

der allgemeinsten Zufallsveränderlichen, d. h. einer Funktionaltransformierten $X = G(R)$, welche dem zufälligen Ergebnis R eines Versuches (etwa der Gestalt eines auf einen Tisch geworfenen Fadens) als eine Größe (z. B. der Inhalt des vom Faden begrenzten Bereiches) zugeordnet wird. Die Rolle der Verteilungsfunktion spielt immer eine über die Untermengen der Menge von Versuchsergebnissen definierte additive Mengenfunktion. — Als weitere entwicklungsfähige Ideen werden die willkürlichen Funktionen von Poincaré, die Markoffschen Ketten und die von Borel zuerst untersuchten Gesamteigenschaften der Folgen von Zufallsveränderlichen, z. B. die fast sicher oder die Cantellisichen, nach Wahrscheinlichkeit eintretenden Konvergenzeigenschaften angeführt.

von Stachó (Budapest).

Koopman, B. O.: The axioms and algebra of intuitive probability. *Ann. of Math.*, II. s. 41, 269—292 (1940).

Es wird eine Axiomatik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gegeben, die sich möglichst eng an den intuitiven Begriff der Wahrscheinlichkeit anlehnen soll. Die grundlegende, durch die Axiome implizit definierte Beziehung ist $a/h < b/k$, in Worten: a ist unter der Voraussetzung, daß h wahr ist, weniger oder gleich wahrscheinlich wie b unter der Voraussetzung, daß k wahr ist. a, h, b, k bezeichnen hierbei Ereignisse. Bei der Formulierung des aus 9 Axiomen bestehenden Axiomensystems werden außer der Grundbeziehung nur die Mittel der Booleschen Algebra benutzt. Durch die Axiome werden die rein formalen Eigenschaften der obigen Grundbeziehung, wie Reflexivität und Transitivität, ausgedrückt, aber auch andere, in denen z. B. zum Ausdruck kommt, daß h/h die größte, überhaupt mögliche Wahrscheinlichkeit besitzt, sowie solche, bei denen Negationen und Konjunktionen von Ereignissen auftreten. Die Einführung von numerischen Wahrscheinlichkeiten geschieht durch eine weitere Annahme, die die Existenz von n -Skalen für jedes beliebige positive, ganzzahlige n fordert. Unter einer n -Skala wird dabei eine Reihe von Ereignissen u_1, u_2, \dots, u_n verstanden, die alle unter einer gewissen Voraussetzung u gleich wahrscheinlich sind, und von denen eines und nur eines unter der Voraussetzung u eintreten muß. Die gegebenen Ableitungen zeigen, daß das System leistungsfähig genug ist, um die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit zu begründen.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Koopman, B. O.: The bases of probability. *Bull. Amer. Math. Soc.* 46, 763—774 (1940).

Enthält eine kürzere Darstellung der vorstehend besprochenen Arbeit.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Wellnitz, Karl: Über eine neue Fassung des Begriffs der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Greifswald: Diss. 1940. 71 S.

Reichenbach, Hans: Bemerkungen zur Hypothesenwahrscheinlichkeit. *J. unified Sci.* 8, 256—260 (1939).

Geiringer, Hilda: Zu „Bemerkungen zur Hypothesenwahrscheinlichkeit“. *J. unified Sci.* 8, 352—353 (1940).

Zu den früheren Ausführungen von H. Geiringer (*J. unified Sci.* 8; dies. Zbl. 21, 424) präzisiert Reichenbach seinen Standpunkt folgendermaßen (ausführlicher in *Wahrscheinlichkeitslehre* (1935); dies. Zbl. 10, 364, dargelegt): Jede Wahrscheinlichkeit im Sinne der Umgangssprache — und daher auch jede „Hypothesenwahrscheinlichkeit“ wie insbesondere die „Wahrscheinlichkeit einer Theorie“ — soll in die Wahrscheinlichkeitstheorie und in die anknüpfende erkenntnistheoretische Diskussion einbezogen und als Häufigkeit gedeutet werden. — H. G. entzieht sich in ihrer Erweiterung einer Diskussion über die einzelnen Reichenbachschen Argumente, indem, ihrer Auffassung nach, Probleme wie solche der „W. einer Theorie“ nicht als wahrscheinlichkeitstheoretische und mathematische Probleme anzusehen sind.

Bruno de Finetti (Trieste).

Mises, R.: Über Aufteilungs- und Besetzungs-Wahrscheinlichkeiten. *Acta Univ. Asiae Med. Taschkent, Ser. V-a Math. Fasc.* 27, 1—20 (1939).

Eine bis zur Erforschung asymptotischer Gesetze geführte Untersuchung ein- oder mehrfacher Besetzungen (x_0, \dots, x_k) von n Plätzen durch k Figuren mit Angabe von Beziehungen zu den Aufteilungen (z_1, \dots, z_{k+1}) von n Figuren auf $k+1$ Plätze;

x_κ bedeutet hierbei die Anzahl der κ -fach besetzten Plätze, z_ν jene der am ν -ten Platz stehenden Figuren. — Der Erwartungswert der relativen Anzahl x_κ/n genau κ -fach besetzter Plätze ergibt sich gleich der Wahrscheinlichkeit, bei k -maliger Voraussage des Platzes, auf den eine bestimmte Figur kommen wird, κ Treffer zu erzielen. Bei $n \rightarrow \infty$ und fester mittlerer Besetzungszahl $a = k/n$ wird dieser Wert somit durch ein Poissonsches Gesetz mit dem Mittelwert a asymptotisch dargestellt. Ähnlich verhält sich asymptotisch die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein von x κ -fach besetzten Plätzen mit dem endlich bleibenden Mittelwert $ne^{-a}a^\kappa/\kappa$. — Der Umstand, daß die Besetzungswahrscheinlichkeit von n Plätzen durch k Figuren sich gleich der Aufteilungswahrscheinlichkeit von n Figuren auf $k+1$ Plätze ergibt, wenn als Nebenbedingung $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = k$ angenommen und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Figur auf den κ -ten Platz kommt, gleich $1/\kappa!$ gesetzt wird, ermöglicht dem Verf. (einem in seinem Handbuch bei Aufteilungswahrscheinlichkeiten verfolgten Gedankengang ähnlich) zu zeigen, daß die wahrscheinlichsten relativen Besetzungszahlen X_κ/n , asymptotisch ebenfalls ein Poissonsches Gesetz mit dem Mittelwert a befolgen, d. h. mit den im Mittel zu erwartenden relativen Besetzungszahlen x_κ/n zusammenfallen und so bei wachsendem $k = an$ in steigendem Maße voneinander unabhängig werden.

von Stachó (Budapest).

Gnedenko, B.: Quelques théorèmes sur l'ensemble des puissances d'une loi de probabilité. Matematika. Učenyje Zapiski Moskov gosud. Univ. 45, 61—70 u. franz. Zusammenfassung 70—71 (1940) [Russisch].

Soit $F(x)$ une loi de probabilité et $f(t)$ sa fonction caractéristique. Si $\mu > 0$, et si $\{f(t)\}^\mu$ est aussi une fonction caractéristique, nous disons que sa loi de probabilité $F^{(\mu)}(x)$ est la μ ^{ième} puissance de la loi $F(x)$. On dit que la loi de probabilité $F(x)$ appartient au domaine d'attraction partielle d'une loi $\Phi(x)$, s'il existe une suite k_n de nombres entiers, une suite B_n de nombres positifs et une suite A_n de nombres réels, telles que les lois de probabilité des sommes

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k_n} - A_n}{B_n}$$

tendent vers $\Phi(x)$. L'auteur démontre six théorèmes sur les relations entre les lois de probabilité qui appartiennent à un domaine donné d'attraction partielle.

B. Hostinskyj (Brünn).

Geiringer, Hilda: A generalization of the law of large numbers. Ann. math. Statist. 11, 393—401 (1940).

La loi des grands nombres admet une démonstration à l'aide d'une formule de Bienaymé-Tchebycheff (relation entre la probabilité pour que x soit plus petit qu'une constante A et la valeur moyenne de x^2); elle s'applique au cas des variables indépendantes ou dépendantes pourvu que l'expression $E \left[\sum_{i=1}^n (x_i - E x_i) \right]^2$ augmente avec n moins rapidement que n^2 . R. v. Mises (Monatshefte f. Math. u. Phys. 1936, 105; ce Zbl. 14, 27) a montré, dans certains cas, que la loi des grands nombres reste valable, si l'on introduit des fonctions statistiques des variables x_1, x_2, \dots, x_n au lieu de leur valeur moyenne. Ces résultats sont généralisés ici de sorte qu'ils s'appliquent aux cas des variables dépendantes.

B. Hostinskyj (Brünn).

Hostinsky, B.: Probabilités relatives aux tirages de deux urnes avec l'échange des boules extraites. Acta Univ. Asiae Med. Taschkent, Ser. V-a Math. Fasc. 21, 1—10 (1939).

Der Verf. behandelt ein Problem von Bernoulli, das von Laplace in einem besonderen Fall erörtert und hier von ihm in die Markoffsche Kettentheorie eingegliedert wurde. — Man nimmt zwei Urnen A und B an, von denen jede e Kugeln enthält. In der Gesamtzahl $2e$ der Kugeln sind ebensoviel weiße wie schwarze Kugeln enthalten. Man zieht gleichzeitig je eine Kugel aus jeder Urne und gibt sie in die andere Urne zurück. Dieser Vorgang wird n -mal wiederholt. — $P_{ik}^{(n)}$ bezeichne die

Wahrscheinlichkeit, daß die Urne A nach der n -ten Ziehung k weiße Kugeln enthält, wenn sie vor der ersten Ziehung i weiße Kugeln aufwies. Wir gelangen zu folgender Differenzengleichung:

$$P_{ik}^{(n)} = P_{i, k-1}^{(n-1)} \frac{(e-k+1)^2}{e^2} + 2 P_{ik}^{(n-1)} \frac{(e-k)k}{e^2} + P_{i, k+1}^{(n-1)} \frac{(k-1)^2}{e^2}.$$

Indem Verf. den Grundsatz von Markoff benützt, zeigt er, daß $P_{ik}^{(n)}$ gegen P_k strebt ($i, k = 0, 1, 2, \dots, e; n \rightarrow \infty; \sum P_k = 1$). Benützt man eine von Romanowski angegebene Methode, so findet man

$$P_{ki}^{(n)} = P_k + \sum_{j=1}^e s_j \varphi_{kj} \psi_{kj},$$

wo s_j die Wurzeln der charakteristischen Gleichung und φ_{kj}, ψ_{kj} Systeme adjungierter Größen sind. — Verf. bemerkt, daß dieses Problem eine große Ähnlichkeit mit dem der Wärmeausbreitung aufweist. *Octav Onicescu (Bukarest).*

Bernstein, Serge: Sur un problème du schéma des urnes à composition variable. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 5—7 (1940).

Der Verf. behandelt folgendes Problem: Es werden n aufeinanderfolgende Ziehungen aus einer Urne vorgenommen, die am Anfang a weiße und b schwarze Kugeln enthält. Nach jeder Ziehung legt man die gezogene Kugel zurück und außerdem noch R andere, und zwar werden, falls die gezogene Kugel weiß ist, v weiße und $\varrho = R - v$ schwarze Kugeln hinzugefügt; wenn die gezogene Kugel schwarz ist, so fügt man v_1 weiße und $\varrho_1 = R - v_1$ schwarze Kugeln hinzu. — Savkevitch hat gezeigt (vgl. nachstehendes Referat), daß bei $\frac{v-v_1}{R} > \frac{1}{2}$ das asymptotische Gesetz der Wahrscheinlichkeiten nicht das normale ist. — Bernstein zeigt in dieser Arbeit, daß bei $\frac{|v-v_1|}{R} < \frac{1}{2}$ ($\varrho v_1 > 0$) das asymptotische Gesetz das von Gauß ist. Er bedient sich dabei der charakteristischen Funktion $\varphi_n(z)$ der Verteilung der Wahrscheinlichkeiten der Größe $m - \frac{n}{2}$, wo m die Anzahl der weißen Kugeln in der Urne nach n Ziehungen ist. Der Fall $\frac{v-v_1}{R} = \frac{1}{2}$ wird dabei nicht behandelt und zur Vereinfachung die Symmetrie vorausgesetzt ($a = b, v_1 = \varrho$). — $\varphi_n(z)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(z) \cos \frac{z}{2} + \frac{2\delta}{2a + nR} \varphi'_n(z) \sin \frac{z}{2} \quad (\delta = v - v_1),$$

die mit der von O. Onicescu und G. Mihoc in einem ähnlichen Fall aufgestellten Gleichung verwandt ist (dies. Zbl. 13, 273). — Im Falle $\frac{2\delta}{R} < 1$ ist die Streuung von der Ordnung n , und zwar ist sie $\frac{nR}{4(R-2\delta)}$, und asymptotisch haben wir $\varphi_n(z) \approx e^{-cnz^2}$, wobei $c = \frac{R}{\delta(R-2\delta)}$ ist. — Aus diesem Probleme entspringt eine statistische Abhängigkeit, die in dem allgemeinen Begriffe von der linearen Kette mit vollständigen Verbindungen enthalten ist. *Oct. Onicescu (Bukarest).*

Savkevitch, V.: Sur le schéma des urnes à composition variable. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 8—12 (1940).

Der Verf. behandelt ein von Bernstein formuliertes Problem (vgl. vorstehende Besprechung). Indem er Symmetrie voraussetzt, schätzt Verf. die Mittelwerte zweiter, dritter und vierter Ordnung ab. — Im Falle $\frac{\delta}{R} > \frac{1}{2}$ stellt er fest, daß die Streuung von der Ordnung $n^{\frac{2\delta}{R}}$ ist, und folgert, daß das asymptotische Gesetz mit dem Gaußschen nicht übereinstimmt. — Bei $\frac{\delta}{R} < \frac{1}{2}$ ist die Streuung von der Ordnung n . *Oct. Onicescu (Bukarest).*

Kanellos, S.: Étude des répétitions dans une suite infinie de tirages. (Loi des répétitions.) Bull. Soc. Math. Grèce 20, 79—84 (1940).

Supposons que deux événements contradictoires A et B se présentent d'une ma-

nière quelconque dans une série d'épreuves et que la probabilité pour que A se présente est p (constante) et celle de B est q ($p + q = 1$). Nous aurons ainsi une suite d'événements $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_N$ (1) où a_n est le résultat de la $n^{\text{ème}}$ épreuve; chaque terme de (1) exprime un des deux événements A ou B . Une partie de la suite (1) telle que $\dots BAB \dots$ s'appelle «répétition du 1^{er} ordre de A »; un couple AA précédé et suivi par B s'appelle «répétition du 2^{ème} ordre de A » et ainsi de suite. Soit E_1 le nombre de répétitions du 1^{er} ordre de A dans la suite (1) et E_n celui de répétitions du $n^{\text{ème}}$ ordre de A . L'auteur démontre le théorème suivant: «Si le nombre N de termes de la suite (1) croît indéfiniment, les valeurs les plus probables de E_1, E_2, \dots, E_n tendent à s'arranger de manière à constituer les termes consécutifs d'une progression géométrique dont la raison est p .»

B. Hostinský (Brünn).

Mood, A. M.: The distribution theory of runs. Ann. math. Statist. 11, 367—392 (1940).

Verf. betrachtet die Reihenfolge, in der die k verschiedenen möglichen Ausprägungen einer stochastischen Größe in einer Beobachtungsreihe beliebiger Länge in Erscheinung treten. Folgt $(t - 2)$ -mal das gleiche Merkmal aufeinander, während ein anderes vorhergeht bzw. sich anschließt, so spricht er von einem Lauf (run) der Länge t . Über die strenge Verteilung von t , die zugehörigen Momente und das asymptotische Verhalten stellt er Untersuchungen an. Zum ersten Male nach einer Arbeit des Ref. [Deutsch. Statist. Zentralbl. 26, 137—146 (1934)] finden sich Betrachtungen über die Reihenfolge beim Vorhandensein von mehr als zwei Merkmalen. Die Formeln des Verf. sind zum Teil recht verwickelt, weil er stets ein einzelnes Merkmal und nicht, wie Ref., symmetrische Verbindungen aller Merkmale ins Auge faßt.

v. Schelling.

Olds, E. G.: On a method of sampling. Ann. math. Statist. 11, 355—358 (1940).

Der Verf. formuliert das Stichprobenproblem wie folgt: Es sei eine Anzahl von m Größen gegeben, die s Elemente eines gewissen Typus enthalten. Wieviel Ziehungen sind im Durchschnitt notwendig, um i Elemente von den s Elementen des bestimmten Typus zu erhalten? — Die Verteilung der Zahl n der notwendigen Ziehungen, in denen man die i Elemente erhält, ist durch die Glieder der Reihe

$$v'_0 = \sum_{n=1}^{m-s+1} \frac{C_{n-1, i-1} C_{m-n, s-i}}{C_{m, s}}$$

gegeben ($C_{h,k} = \binom{h}{k}$). Mit dieser Formel leitet Verf. Mittelwerte und Schätzungen für verschiedene statistische charakteristische Werte für eine Anzahl praktischer Probleme ab.

Oct. Onicescu (Bukarest).

Laderman, Jack: The distribution of „Students“ ratio for samples of two items drawn from non-normal universes. Ann. math. Statist. 10, 376—379 (1939).

Einer innerhalb des Intervalls $\langle a, b \rangle$ kontinuierlich verteilten Wertegesamtheit mit der Verteilungsdichte $f(x)$ und dem Mittelwert 0 werden zufallsmäßig Stichproben vom Umfange $n = 2$, (x_1, x_2) , entnommen. Verf. bestimmt für diesen Fall auf einem von Rider [On the distribution of the ratio of the mean to standard deviation in small samples from non-normal universes, Biometrika 21, 124—143 (1929)] zu ähnlichem Zweck benutzten geometrischen Wege die exakte Verteilung $g(t)$ des Studentischen Verhältnisses

$$t = \frac{\bar{x} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2}} \quad \left(\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

und erhält

$$g(t) = \begin{cases} \frac{4}{(t-1)^2} \cdot \int_0^a x \cdot f(x) \cdot f\left(\frac{t+1}{t-1} \cdot x\right) dx & \text{für } t \leq \frac{b+a}{b-a}, \\ \frac{4}{(t+1)^2} \cdot \int_0^b x \cdot f(x) \cdot f\left(\frac{t-1}{t+1} \cdot x\right) dx & \text{für } t \geq \frac{b+a}{b-a}. \end{cases}$$

Der Ausdruck stellt eine Verallgemeinerung des Riderschen Ergebnisses von recht-eckigen auf beliebige Verteilungen dar und stimmt im Falle der Normalverteilung

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ mit der Studentverteilung [Student, The probable error of a mean, *Biometrika* 6, 1—25 (1908)] für $n = 2$ überein. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Hsu, C. T.: On samples from a normal bivariate population. *Ann. math. Statist.* 11, 410—426 (1940).

Eine Stichprobe werde aus einem zweidimensionalen normalen Kollektiv entnommen. Aussagen über die wahren Mittelwerte und Streuungen sowie über den wahren Korrelationskoeffizienten werden auf Grund dieser Stichprobe gewünscht. Verf. stellt sieben verschiedene Hypothesen über die Parameter auf und leitet für jede die zugehörige λ -Probe ab. In fünf Fällen kann die Beurteilung nach einer geeigneten Transformation auf vorhandene Tafeln gestützt werden, für die beiden restlichen Fälle gibt Verf. eine eigene Tabelle. Betrachtungen über die Wirksamkeit der Proben in bezug auf die Aufdeckung von Irrtümern zweiter Art machen den Beschluß. *v. Schelling.*

Lengyel, B. A.: On testing the hypothesis that two samples have been drawn from a common normal population. *Ann. math. Statist.* 10, 365—375 (1939).

Es handelt sich um die Frage, ob zwei Stichproben gleichen Umfangs N mit 2, 3 oder 4 Veränderlichen aus einem gemeinsamen, in allen Variablen normalen Kollektiv stammen. Theoretisch gibt die λ -Probe Antwort, doch liegen für die erwähnten Fälle noch keine Tafeln vor. Die Verteilung von λ ist noch nicht bekannt, wohl aber ihre Momente. Diesen paßt Verf. eine Pearsonkurve an und berechnet mit ihrer Hilfe Mutungsgrenzen der Größe $\lambda^{1/N}$ für die Chancen 1% und 5%. *v. Schelling.*

Bishop, Morris C.: A note on computation for analysis of variance. *Ann. math. Statist.* 10, 393—399 (1939).

Die Arbeit befaßt sich mit praktischen Vorschlägen für die bei einfacher und mehrfacher Streuungszerlegung auftretenden Rechnungen und Kontrollrechnungen; dabei handelt es sich im wesentlichen um wiederholte sinngemäße Anwendung der bekannten Verschiebungsformel

$$\sum_{j=1}^k (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{j=1}^k X_{ij}^2 - \frac{T_i^2}{k}, \quad \bar{X}_i = \frac{T_i}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_{ij}.$$

Bei mehrfacher, z. B. doppelter Streuungszerlegung deutet Verf. als Reststreuung (interaction) nicht wie üblich: Gesamtstreuung minus Streuung zwischen den Zeilen minus Streuung zwischen den Spalten (jeweils mit der entsprechenden Anzahl der Freiheitsgrade multipliziert), sondern Streuung innerhalb der Spalten minus Streuung zwischen den Zeilen bzw. Streuung innerhalb der Zeilen minus Streuung zwischen den Spalten. Die Ausführungen werden an einem Zahlenbeispiel von 16 in 4 Zeilen und 4 Spalten aufgeteilten Zahlen erörtert. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Norris, Nilan: The standard errors of the geometric and harmonic means and their application to index numbers. *Ann. math. Statist.* 11, 445—448 (1940).

Durch Übergang zu Logarithmen bzw. den reziproken Werten gelingt es Verf., auf Grund eines Existenzsatzes von Laplace-Liapounoff die mittleren Fehler des geometrischen und harmonischen Mittels in aller Strenge herzuleiten. *v. Schelling.*

Wald, Abraham: Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypotheses. *Ann. math. Statist.* 10, 299—326 (1939).

Das Verfahren von J. Neyman und E. S. Pearson hat nicht das gehalten, was es anfänglich zu versprechen schien. In vielen praktisch wichtigen Fällen existieren die benötigten besten kritischen Bereiche nicht. Dieser Umstand veranlaßt Verf. zu einer Verallgemeinerung. Er faßt den Fall von n stochastischen Variablen und k unbekannten Parametern ins Auge. Aus den Beobachtungen der Veränderlichen soll auf die Größe der Parameter geschlossen werden. Dazu führt er zwei willkürliche Hilfsfunktionen ein, nämlich Gewichte für die Fehlschätzungen und formal eine „Verteilung“ für die Parameter, obwohl diese „in Wahrheit“ doch bestimmt konstant sind. Diese Verteilung fällt aus den Schlußergebnissen

dann wieder heraus, trotzdem ist ihre Benutzung bedenklich. Auch die Gewichte sind nur subjektiv festzulegen. Es ist gerade der große Fortschritt gewesen, daß J. Neyman und E. S. Pearson im Gegensatz zu Th. Bayes ohne zusätzliche Annahmen ausgekommen sind. Die Einführung der beiden Hilfsfunktionen wirkt demgegenüber wie ein Rückschritt. Die Sätze des Verf. bleiben leere Theorie, die kurzen Beispiele sprechen keineswegs für die praktische Bedeutung seiner Ansätze.

v. Schelling (Berlin).

McCarthy, M. D.: On the application of the z-test to randomized blocks. Ann. math. Statist. 10, 337—359 (1939).

Nach sehr breiter Einleitung greift Verf. eine Frage auf, die einst J. Neyman in einem Vortrag [Suppl. J. R. statist. Soc., London 2, 107—154 (1935)] formuliert hat. Die Anwendung der z-Probe auf die zufällig verteilten Schläge (randomized blocks) setzt nach Neyman für den Fall, daß mehr als zwei Varietäten geprüft werden, gleiche Fruchtbarkeit des Bodens innerhalb der einzelnen Schläge voraus. Sobald die Unterschiede des Bodens nicht vernachlässigt werden können, müssen Korrelationen zwischen den Erträgen berücksichtigt werden. Verf. zeigt nun einen Weg, auf dem theoretisch dieses Ziel zu erreichen ist. Allerdings werden die Formeln so verwickelt, daß er vorläufig nur für den einfachsten Fall dreier Varietäten zu numerischen Abschätzungen gelangt. Diese beweisen, daß dem Problem durchaus eine praktische Bedeutung zukommt.

v. Schelling (Berlin).

Deming, W. Edwards, and Frederick F. Stephan: On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known. Ann. math. Statist. 11, 427—444 (1940).

Für eine Gesamtheit des Umfangs N kennt man die Randwerte einer $m \times n$ -Tafel, nicht aber ihre Zellenwerte. Aus der Gesamtheit wird eine Stichprobe des Umfangs n entnommen, für die alle Zellenwerte vorliegen, die aber stark vom Zufall beeinflusst sind. Als beste Schätzungen für die wahren Randsummen werden nun die im Verhältnis $n:N$ verkleinerten Randsummen der Gesamtheit angenommen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate werden die beobachteten Zellenwerte so korrigiert, daß sie den neuen Randbedingungen gehorchen. Die verbesserten Zellenwerte werden nun im Verhältnis $N:n$ vergrößert. Die Ergebnisse dieser Operation gelten als beste Schätzungen für die unbekannten Zellenwerte der Gesamtheit.

v. Schelling (Berlin).

Johnson jr., Evan: Estimates of parameters by means of least squares. Ann. math. Statist. 11, 453—456 (1940).

Wird mit θ ein zunächst noch unbekannter, aber in einem vorliegenden statistischen Problem als konstant vorausgesetzter Wert — Parameter — bezeichnet und ist x eine Veränderliche über einer statistischen Gesamtheit, sind ferner x_1, x_2, \dots, x_n beobachtete Werte von x und F eine Funktion dieser beobachteten Werte, dann heiße F eine Bewertung (estimate) von θ . $F - \theta$ heiße der Fehler (error). Die Verteilungsfunktion der Fehler werde mit $f(F)$ bezeichnet. Es werde vorausgesetzt, daß $\int_{\alpha}^{\beta} f(F) dF = 1$,

wo das Integrationsintervall alle möglichen Werte von F umfasse. Zwei Kriterien zur Beurteilung einer Bewertung werden aufgestellt: 1. Sind f_1 und f_2 die den Bewertungen F_1 und F_2 zugeordneten Verteilungsfunktionen, so heißt F_1 besser als F_2 , wenn

$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \theta)^2 f_1(x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} (x - \theta)^2 f_2(x) dx$ ist. 2. Gehört F einer Funktionsklasse an, dann ist jene Funktion F die beste Bewertung, für die das Integral $I = \int_{\alpha}^{\beta} (F - \theta)^2 f(F) dF$,

kleiner ist als für alle anderen Funktionen der Klasse. Die eingeführten Begriffe werden an den Beispielen

$$F = a(x_1 + x_2 \dots + x_n), \quad F = a\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\}$$

unter Verwendung der Ergebnisse der Arbeit von D. Jackson [Amer. Math. Monthly 42, 344—364 (1935); dies. Zbl. 11, 409] erläutert. F. Knoll (Wien).

Bachmann, W. K.: L'ellipsoïde d'erreur. Schweiz. Z. Vermessungswes. 38, 181—197, 201—208 u. 213—216 (1940).

Nach einer kurzen Erwähnung der drei Verfahren, nach denen das Fehlerellipsoid eingeführt werden kann, geht Verf. von der Methode von Czuber aus und bringt an ihr einige Vereinfachungen an. Außerdem entwickelt er die Theorie des Fehler-

ellipsoides im Falle von n Dimensionen, die auch beim Studium trigonometrischer Netze angewandt werden kann. *Bossolasco (Milano).*

Lowan, Arnold N., and Jack Laderman: On the distribution of errors in N^{th} tabular differences. *Ann. math. Statist.* **10**, 360—364 (1939).

Es wird folgende, im Anschluß an die Tabulierung von Funktionen auftretende Aufgabe gelöst: Einer rechteckig verteilten Gesamtheit seien zufallsmäßig $n + 1$ Werte x_0, x_1, \dots, x_n entnommen, die in bestimmter Anordnung die Differenz n -ter Ordnung Δ^n ergeben. $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ seien die durch Abrundung auf k Dezimalstellen aus x_0, x_1, \dots, x_n hervorgehenden Zahlen, die in derselben Anordnung zur n -ten Differenz Δ^n führen. Wie lautet die Verteilung des Fehlers der n -ten Differenz, $y = \Delta^n - \bar{\Delta}^n$? — Ausgehend von der rechteckigen Verteilung der Differenz $E = x - \bar{x}$:

$$f(E)dE = \begin{cases} 10^k dE & \text{für } -\frac{1}{2}10^{-k} \leq E \leq \frac{1}{2}10^{-k}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

erhalten Verff. mit Hilfe der charakteristischen Funktion als Verteilung von y

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \prod_{j=0}^n \frac{\sin\left[\frac{1}{2}10^{-k}\binom{n}{j}t\right]}{\frac{1}{2}10^{-k}\binom{n}{j}t} dt.$$

Die Berechnung dieses Integrals führen Verff. allgemein auf die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t^{n+1}} dt$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{t^{n+1}} dt$ zurück. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Höfding, Wassilij: Maßstabinvariante Korrelationstheorie. *Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin* **5**, 181—233 (1940) u. Berlin: Diss. 1940.

Es liege eine im Intervall $\alpha \leq \xi \leq \beta$, $\gamma \leq \eta \leq \delta$ definierte, kontinuierliche zweidimensionale Verteilung $w(\xi, \eta)$ mit den eindimensionalen Randverteilungen

$$u(\xi) = \int_{\gamma}^{\delta} w(\xi, \eta) d\eta, \quad v(\eta) = \int_{\alpha}^{\beta} w(\xi, \eta) d\xi$$

vor. Um die Beziehungen zwischen ξ, η unabhängig von ihren Maßstäben zu untersuchen, normiert Verf. die Variablen ξ, η , d. h. transformiert Verf. ξ, η mittels einer „Maßstabänderung“

$$x = \int_{\alpha}^{\xi} u(\xi) d\xi - \frac{1}{2}, \quad y = \int_{\gamma}^{\eta} v(\eta) d\eta - \frac{1}{2}$$

auf die normierten Variablen x, y mit der normierten zweidimensionalen Verteilung $s(x, y) = w(\xi, \eta)/u(\xi)v(\eta)$ im Einheitsquadrat $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, deren Randverteilungen Gleichverteilungen sind. Da alle durch bloße Maßstabänderungen [d. h. durch Transformationen $\bar{\xi} = f(\xi)$, $\bar{\eta} = g(\eta)$ mit eigentlich monotonen, stetigen und bis auf höchstens abzählbar unendlich viele Punkte differenzierbaren $f(\xi)$, $g(\eta)$] auseinander hervorgehenden zweidimensionalen Verteilungen durch die Normierung auf konstante Randverteilungen zur selben normierten Verteilung $s(x, y)$ führen, erhält man durch Untersuchung der Eigenschaften von $s(x, y)$ die maßstabinvarianten Eigenschaften beliebiger Verteilungen $w(\xi, \eta)$. Als „normierter“ Korrelationskoeffizient ergibt sich eine dem von Spearman für diskrete Verteilungen definierten Rang-Korrelationskoeffizienten entsprechende maßstabinvariante Maßzahl, die zwar ebenso wie der gewöhnliche Korrelationskoeffizient r bei stochastischer Unabhängigkeit, aber nicht nur bei solcher verschwindet, dagegen die Grenzen ± 1 im Falle und nur im Falle umkehrbar eindeutig und stetiger funktioneller (also nicht wie r nur bei linearer) Abhängigkeit erreicht. Die Pearsonsche mittlere quadratische Kontingenz φ^2 ergibt sich, von der normierten Verteilung $s(x, y)$ ausgehend, ohne Zuhilfenahme von Gewichten, also erheblich natürlicher als von $w(\xi, \eta)$ ausgehend. Analog definiert Verf.,

auf der normierten Summenfunktion $S(x, y) = \int_{-\frac{1}{2}}^y \int_{-\frac{1}{2}}^x s(x, y) dx dy$ fußend, ein weiteres maßstabinvariantes Abhängigkeitsmaß Φ^2 , das allerdings durch die Grenzen ± 1 nur den Fall umkehrbar eindeutiger — aber nicht wie das Pearsonsche Kontingenzmaß $C = \sqrt{\varphi^2/1 + \varphi^2}$ beliebiger. — funktioneller Abhängigkeit kennzeichnet. Der letzte Teil der Arbeit ist der Entwicklung normierter Verteilungs- und Summenfunktionen nach orthogonalen Polynomen gewidmet, aus der sich interessante Beziehungen zwischen φ^2 , Φ^2 und den normierten Momenten ergeben. *M. P. Geppert.*

Starkey, D. M.: The distribution of the multiple correlation coefficient in periodogram analysis. Ann. math. Statist. 10, 327—336 (1939).

H. Hotelling [Amer. J. Math. 61, 440 (1939); ce Zbl. 20, 383] a donné une interprétation géométrique du coefficient de corrélation; la probabilité pour que ce coefficient soit supérieur à un nombre donné est proportionnelle à une portion d'une hypersphère. L'auteur emploie cette méthode à l'étude de la relation $Y = a + b f(x, k, \varepsilon)$, (1) où f est une fonction arbitraire; a, b, ε sont des constantes. Les valeurs y_1, y_2, \dots, y_n de Y sont données par des observations (y_i correspond à la valeur donnée x_i de x). Il s'agit de la corrélation entre les valeurs observées y_i et celles de Y calculées au moyen de la formule (1). Le cas particulier où f est une fonction périodique simple: $Y_n = a + b \cos(kx_n + \varepsilon)$ est considéré en détail. *B. Hostinský (Brünn).*

Derksen, J. B. D.: On some infinite series introduced by Tschuprow. Ann. math. Statist. 10, 380—383 (1939).

In einer Reihe von statistischen Untersuchungen, so bei Tschuprow, Entwicklung von

$$\left(\frac{p'_{ij}}{p'_{i1}}\right)^2 = \left(\frac{p_{ij}}{p_{i1}}\right)^2 \left(1 + \frac{dp_{ij}}{p_{ij}}\right)^2 \left(1 + \frac{dp_{i1}}{p_{i1}}\right)^{-2}$$

in eine Reihe, oder bei dem Pearson-Bravaischen Korrelationskoeffizienten

$$E(r) = E\left(\frac{\mu_{11} + d\mu_{11}}{(\mu_{20} + d\mu_{20})^{1/2}(\mu_{02} + d\mu_{02})^{1/2}}\right)$$

treten divergente Reihen auf. Durch Einführung der „bedingten zufälligen Veränderlichen“ nach Slutsky [„Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte“, Metron 5, Nr 3, 79 (1925)] wird erreicht, daß der Konvergenzradius der Reihen nicht überschritten wird. *F. Knoll.*

Biomathematik, Versicherungs- und Finanzmathematik:

Hadwiger, H.: Eine analytische Reproduktionsfunktion für biologische Gesamtheiten. Skand. Aktuarie Tidskr. 23, 101—113 (1940).

Ein Urindividuum J_0 , dessen Altersnullpunkt bei $t = 0$ liegt, produziere die Individuen J_1 , diese die J_2, \dots , und G_n bezeichne die Gesamtheit der J_n . $\varphi_n(\xi)$ bezeichne den Zuwachs von G_n pro Zeiteinheit im Zeitpunkt ξ . Dann gilt

$$(1) \quad \varphi_{n+m}(x) = \int_0^x \varphi_n(x - \xi) \dot{\varphi}_m(\xi) d\xi.$$

Verf. macht nun die entscheidende Annahme, daß alle Erzeugungsfunktionen $\varphi_n(x)$ von einem Parameter derart abhängen, daß man setzen kann: $\varphi_n(x) = \psi(x, na)$, womit aus (1) die Funktionalgleichung

$$(2) \quad \psi(x, p + q) = \int_0^x \psi(x - \xi, p) \psi(\xi, q) d\xi$$

entspringt. Eine Lösung von (2) lautet

$$(3) \quad \varphi_1(x) = \psi(x, a) = \frac{a}{\sqrt{\pi} x^3} \exp\left\{Ca - \frac{a^2}{x} - Ax\right\}$$

mit willkürlichen Konstanten A, C . $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ ist die Gesamtzahl der Reproduktionen pro Zeiteinheit im Zeitpunkt x , $B(x) = 1 + \int_0^x G(\xi) d\xi$ der Bestand der

Individuengesamtheit zur gleichen Zeit. Es existiert der Grenzwert $B = \lim_{x \rightarrow \infty} B(x)$ dann und nur dann, wenn $C^2 < 4A$, und zwar ist dann

$$B^{-1} = 1 - \exp\{a(C - 2\sqrt{A})\}.$$

Ersetzt man die Anfangsbedingung durch die Annahme einer seit unendlich langer Zeit bestehenden Gesamtheit, so erfüllt $G(x)$ die Lotkasche Integralgleichung

$$G(x) = \int_0^{\infty} G(x - \xi) \varphi_1(\xi) d\xi,$$

die man durch den Ansatz $G(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{r_n x}$ ($r_{-n} = \bar{r}_n$) löst, in dem r_n die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(4) \quad \int_0^{\infty} e^{-rt} \varphi_1(t) dt = 1$$

bezeichnen. Im Falle der Erzeugungsfunktion (3) lautet (4): $a(2\sqrt{A + r_n} - C) = 2n\pi i$, und wegen der notwendigen Beschränkung auf das Konvergenzgebiet von (4) ist dabei $|n| \leq \frac{aC}{2\pi}$; $r_n = \frac{1}{4}C^2 - A - n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + in \frac{\pi C}{a}$. Für $C < 0$ hat (4) also gar keine Wurzeln, für $C \geq 0$ nur endlich viele. $G(x)$ verhält sich demnach exponentiell zu- oder abnehmend, je nachdem $C^2 - 4A > 0$ bzw. < 0 ist. *Harald Geppert* (Berlin).

Brown, A. W.: A note on the use of a Pearson type III function in renewal theory. *Ann. math. Statist.* 11, 448—453 (1940).

Ist $f(t)$ die Ausscheide-, $B(t)$ die Erneuerungsfunktion, N die anfängliche Individuenzahl, so gilt die Gleichung

$$B(t) = Nf(t) + \int_0^t B(t-x)f(x)dx.$$

Man kann sie durch den „Generationsansatz“:

$$B(t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t); \quad B_1(t) = Nf(t); \quad B_{i+1}(t) = \int_0^t B_i(t-x)f(x)dx \quad (i \geq 1)$$

lösen. Der Praxis angleichend setzt Verf. für $f(x)$ eine Pearsonkurve Typ III:

$$f(x) = \frac{c^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-ct}$$

ein und findet die zugehörige Erneuerungsfunktion

$$B(t) = Nce^{-ct} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ct)^{i k - 1}}{\Gamma(ik)},$$

also eine Art gedämpfter Schwingung. Die Konstanten c, k lassen sich bei vorgelegtem Zahlenmaterial nach der Momentenmethode bestimmen. Zahlenbeispiel.

Harald Geppert (Berlin).

Backman, Gaston: Methodik der theoretischen Wiedergabe beobachteter Wachstumsserien. *Lunds Univ. Årsskr.*, N. F. 35, Nr 8, 1—20 (1939).

Verf. hat früher (vgl. dies. Zbl. 21, 29) ein Wachstumsgesetz zwischen normierter Wachstumsgeschwindigkeit H und normierter Eigenzeit T des Organismus angegeben, nämlich: $\log H = k \cdot (\log T)^2$. Durch Integration gelangt man zu einem Gesetz für das Gesamtwachstum als Funktion der Zeit, in das die Krampsche Transzendente eingeht (vgl. auch dies. Zbl. 23, 253). An Hand desselben entwickelt Verf. Verfahren zur Bestimmung der spezifischen Konstanten.

Harald Geppert (Berlin).

Mittmann, Otfried: Theoretische Erbprognose und Gattenwahl. *Deutsche Math.* 5, 328—337 (1940).

Bei der Bestimmung der wahrscheinlichen Erbbelastung eines Prüflings in bezug auf ein einortig mendelndes Erbmerkmal wird gewöhnlich wahllose Durchmischung der Bevölkerung zugrunde gelegt. Verf. fragt nach dem Einfluß der Gattenwahl, ins-

besondere einer Paarungsvermeidung zwischen verschiedenen Veranlagten, auf die Belastungsziffern. Dabei zeigt sich, daß die Eigenbelastung des Prüflings sich nach den reinerbigen Klassen hin verschiebt und daß das gleiche von der elternmäßigen Belastung eines gesunden Prüflings mit gesunden Eltern, sowie der kindermäßigen Belastung jedes gesunden Prüflings gilt, während die Elternbelastung eines gesunden Prüflings mit mindestens einem kranken Elter sich in umgekehrter Richtung verschiebt. Ein Zahlenbeispiel, bei dem 50proz. Dominanz zugrunde gelegt ist, zeigt, daß die Abhängigkeit der Belastungsziffern von der Gattenwahl wesentlich ist und im allgemeinen nicht vernachlässigt werden kann.

Harald Geppert (Berlin).

Schelling, H. von: Zur Schätzung der Anzahl der eineiigen Zwillinge. Z. menschl. Vererbgs- u. Konstit.lehre 24, 566—570 (1940).

Liegt eine Beobachtungsreihe von Zwillingen vor, so ist nur die Anzahl v der Pärchenzwillinge (PZ) und die Anzahl g der gleichgeschlechtigen Zwillinge (GZ) bekannt; unbekannt ist dagegen die Anzahl e der eineiigen Zwillinge (EZ) oder, was damit gleichbedeutend ist, die Anzahl z der zweieiigen Zwillinge (ZZ) bzw. die Anzahl $x = z - v$ der gleichgeschlechtigen ZZ. Die auf der Tatsache, daß das Geschlechtsverhältnis der ZZ 1:1 lautet, beruhende übliche Schätzung $e = g - v$ ergänzt Verf. durch Angabe ihres mittleren Fehlers $\sigma_x = \sqrt{2v}$. Von verschiedenen Fragestellungen ausgehend, entwickelt Verf. zwei weitere Schätzungsverfahren: Abgrenzung des Priggeschen Mutungsbereiches für den wahren v -Wert liefert, wenn $x = v$ als sicher angenommen wird, entsprechende Mutungsgrenzen für e ; für z erhält man ebenfalls Priggesche Mutungsgrenzen, wenn man davon ausgeht, daß ein ZZ mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ ein PZ ist.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Haafien, M. van: Elementare Behandlung der veränderlichen Versicherung auf den Todesfall. Verzekerings-Arch. 21, 156—176 (1940) [Holländisch].

Die bei den Prüfungen der Aktuarkandidaten gelieferten Lösungen von Aufgaben mit veränderlicher Summe erscheinen Verf. zu umständlich. Er bringt daher eine tatsächlich einfache Entwicklung mit Hilfe der von ihm und P. van Royen dem Internationalen Aktuar-Kongreß, Rom 1934, vorgeschlagenen Symbole $(DA)_{x|\overline{n}}^1$ und $(JA)_{x|\overline{n}}^1$; diese bedeuten Barwert der mit n beginnenden und jährlich um 1 abnehmenden Summe bez. der mit 1 beginnenden und in n Jahren auf n steigenden Summe. Die Buchstaben D und J sollen an decreasing und increasing erinnern. In den schon gültigen internationalen Bezeichnungen ist

$$(DA)_{x|\overline{n}}^1 = \frac{nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x},$$

$$(JA)_{x|\overline{n}}^1 = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.$$

Auf S. 162 ist in Gleichung (7) rechts die Klammer zu ergänzen. — Die D - und J -Werte sind in Holland schon tabelliert. Der Ausschuß der Internationalen Kongresse hat auf seiner Sitzung, Brüssel 1939, beschlossen, dem nächsten Kongreß das Zeichen D zur Annahme zu empfehlen. Für veränderliche Summen benutzt Verf. das vorausgesetzte nicht-kursive v , also z. B. $(vA)_{x|\overline{n}}^1$; Ref. fürchtet leicht eine Verwechslung mit dem Abzinsungsfaktor v . Von den verschiedenen Aufgaben, die Verf. behandelt, bietet mathematisch das meiste Interesse die Versicherung mit Rückgewähr, wobei m aus der Gleichung

$$m = a_x + (DA)_{x|\overline{n}}^1$$

durch lineare Interpolation zu bestimmen ist. Die Nummer (18) dieser Gleichung auf S. 174 ist zu ergänzen.

Lorey (Frankfurt a. M.).

Hagstroem, K.-G.: Über Versorgungsversicherung. Bl. Versich.-Math. 5, 97—120 (1940).

Eingehende Untersuchungen über Kinderversorgungsversicherungen als Kombinationen von gemischten Versicherungen, Versicherungen auf den Erlebensfall, Ver-

sicherungen mit bestimmter Verfallzeit oder aufgeschobenen Leibrentenversicherungen einerseits und Versicherungen von einer der zwei Formen, deren Nettobarwerte

$$\frac{1}{D_x} \int_x^z D_\xi \mu_\xi \bar{a}_{z-\xi} d\xi = \bar{a}_{z-x} - \bar{a}_{x:z-x}$$

und

$$\frac{1}{D_x} \int_x^z D_\xi \mu_\xi (z - \xi) d\xi$$

sind, andererseits (vgl. Verf. Arbeiten in Skand. Aktuarie Tidskr. 1925, 234 und 1933, 1). Insbesondere werden der Verlauf der Prämienreserve mittels Betrachtung seiner Differentialquotienten untersucht und Bedingungen angegeben, die nötig sind, um negative Prämienreserven zu vermeiden.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Konus, A.: On the theory of means. Acta Univ. Asiae Med. Taschkent, Ser. V-a Math. Fasc. 24, 1—8 u. engl. Zusammenfassung 8—10 (1939) [Russisch].

Eine homogene Funktion von n Größen x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnet Verf. als „Mittel“. Er untersucht, wie derartige allgemeine Mittel auf leichte Änderungen der Elemente x_i ansprechen. Daraus zieht er Folgerungen über den zweckmäßigen Aufbau von Preisindizes.

v. Schelling (Berlin).

Geometrie.

Grundlagen, Nichteuclidische Geometrie:

Hjelmslev, Johannes: La géométrie sensible. 1. Enseignement Math. 38, 7—27 (1940).

Mit dieser Abhandlung über die Géométrie sensible nimmt Hjelmslev von neuem seine, am weitesten aus seinen Vorträgen über die Natürliche Geometrie [Hamburg. math. Einzelschr. 1 (1923)] bekannten Bestrebungen auf, eine Geometrie der Wirklichkeit zu begründen. Die vorliegende erste Mitteilung enthält eine Einleitung und dann unter dem Titel „Les éléments sensibles“ Definitionen der Gegenstände der intendierten Geometrie. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie der Verf. verfährt, kann man sagen, daß er zunächst gewisse starre Körper erklärt, zu denen die Zeichensinstrumente gehören, und daß er dann mit ihrer Hilfe die Objekte auf dem Zeichenspapier definiert. Dabei gibt er auch an, wie die elementaren Konstruktionen ausgeführt werden und trifft eine Reihe von einfachen Feststellungen an geometrischen Figuren. Bei der Behandlung der Messung von Flächen wird der Satz des Pythagoras nach Clairaut bewiesen. In dieser Geometrie besitzt eine geometrische Größe (auch nach Wahl einer festen Einheit) nicht eine feste Maßzahl, sondern mehrere benachbarte Zahlen als Maßzahlen, und alle geometrischen Größen sind kommensurabel. Z. B. ist die Diagonale des Einheitsquadrats zur Seite nicht inkommensurabel; es ist vielmehr nur so, daß unter den Maßzahlen der Diagonalen Paare a_1, a_2 auftreten, deren Produkt $a_1 a_2 = 2$ ist.

Bachmann (Marburg a. d. L.).

● **Locher-Ernst, Louis:** Projektive Geometrie und die Grundlagen der Euklidischen und Polareuklidischen Geometrie. (Urphänomene der Geometrie, 2. Tl.) Zürich u. Leipzig: Orell Füssli Verl. 1940. XV, 290 S. u. 151 Abb. geb. RM. 7.50.

Verf. umreißt das Ziel des Buches so: „Es gibt eine breit geschriebene, streng aufgebaute Einführung in die projektive Geometrie der Ebene . . ., wobei es nicht so sehr auf Bezeichnungen ankommt, als vielmehr auf das Ausbilden der zugrunde liegenden Vorstellungen.“ Eine Grundthese des Buches ist das Wirksamwerden einer bestimmten Weltanschauung und Weltansicht theosophisch-anthroposophischer Prägung im Sinne Rudolf Steiners auch in der Geometrie; diese Richtung hat bekanntlich weitgehend die Begriffe bei Goethe geholt und sie in ihrer Weise interpretiert, was auch hier deutlich zum Ausdruck kommt. Die diesbezüglichen, in das Buch eingehenden Gedanken, die vielfach die Auswahl der Gegenstände und die Methoden der Darstellung bedingen, sind reine Spekulation auf metaphysischem Hintergrunde und auf dem hier eingeschlagenen Wege für die Mathematik sicher abwegig. Vieles bleibt hier ganz dunkel und kann wohl nur von den Esoterikern des Steinerschen Kreises ganz

„verstanden“ werden. — Soweit sich in dem Werk jedoch das Bestreben ausdrückt, zu einer sinnhaften Erfassung des Geometrischen vorzudringen und vom reinen Nominalismus frei zu werden, ist das Buch als durchaus positiv zu werten. Ansätze in Richtung dieses Strebens sind mehrfach vorhanden und viele Überlegungen des Werkes tendieren nach sinnvollem Erfassen des Geometrischen. — Wir geben kurz eine Inhaltsangabe des Buches. Im Anhang ist die dualistische Axiomatik in Auswahl zusammengestellt. Der I. Teil handelt dann von der Anordnung der Grundelemente im Raum und entwickelt zuerst die Urphänomene der Anordnung, wobei alle denkbaren Fälle explizit diskutiert werden. Die „Zwischen“beziehung wird dabei — im Sinne von Enriques — auf die Beziehung des „Sichtrennens“ von Elementen gestützt, da „sich der gewöhnliche Begriff ‚zwischen‘ für die allgemeine projektive Geometrie als unzulänglich erweist“. (Verf. scheint die Arbeiten von Liebmann und des Ref. nicht zu kennen, in denen gezeigt ist, daß sich „zwischen“ im Rahmen der projektiven Geometrie mittels der elliptischen Involution ganz natürlich erklären läßt, daß aber die projektive Geometrie darauf verzichten und „Anordnungsaxiome“ beweisen kann.) Nach den drei Urphänomenen der Anordnung folgt das Urphänomen der Stetigkeit, für die Verf. den Begriff der ideellen Bewegung (ein Elementexemplar durchläuft eine ganze Mannigfaltigkeit gleichartiger Elemente) aufnimmt und damit alle Schwierigkeiten wieder einführt, die dieser Begriff mit sich bringt. Mit zum Wichtigsten gehören die jetzt folgenden Untersuchungen zur Zerlegung der Ebene durch Geraden und Punkte, die in dieser vollständigen Form wohl original sind (Ansätze dazu in der Diss. des Ref.). Ihre Verbindung mit dem Matrizenkalkül ist eine beachtliche mathematische Leistung. Es folgt der Aufweis der Zyklicität der Fünfheit (5 Geraden, 5 Punkte) in der Ebene (im wesentlichen die Fünfecksprojektivität von Clebsch-Liebmann) und der Begriff der „Konvexität“ ebener Figuren auf projektiver Grundlage (der im wesentlichen auf die in der Diss. des Ref. gegebene Definition hinausläuft). — Der II. Teil behandelt die Hauptsätze der projektiven Geometrie und beginnt mit den Gegenständen, mit denen man eine projektive Geometrie meist zu beginnen pflegt. Es folgt der Fundamentalsatz der p. G., der ähnlich formuliert ist wie in Liebmanns „Synthetischer Geometrie“, beweistechnisch aber mit Stetigkeit arbeitet, die man bekanntlich hier entbehren kann. Anschließend folgt die Konstruktion des Möbiusschen Netzes, wobei das geometrische „Problem des Kontinuums“ in origineller Weise aufgerollt und aufgespalten wird. Hierauf ergeben sich dann die Kegelschnitte und ihre projektiven Haupteigenschaften (Pascalscher Satz, Maclaurinscher Satz, Polarentheorie, Involutionen, Kollineationen und Reziprozitäten). Jetzt erfolgt die Einführung projektiver Koordinatensysteme, und es werden die zahlenmäßigen Ausdrücke der Projektivität gewonnen. — Der III. Teil ist für den Mathematiker ganz problematisch. Er handelt von der unendlich fernen Ebene und vom absoluten Mittelpunkt. Mit fruchtbaren Gedanken mischen sich metaphysische Spekulationen, deren Zugehörigkeit zu mathematischen Problemstellungen nur auf dem Boden der Weltanschauung des Verf. verständlich werden kann. — Im IV. Teil wird die Euklidische und die polareuklidische Geometrie behandelt und mit dem rechten Winkel und der absoluten Involution begonnen (absolutes Polarsystem). Es folgen die Begriffe der „Kongruenz“ und der „Fernkongruenz“ (gewisse Spiegelungen) und die Begriffe der „Ähnlichkeit“ und der „Fernähnlichkeit“. Es ergibt sich dann die Kennzeichnung: „Die Euklidische Metrik wird gegeben durch die unendlich ferne Gerade und zwei imaginäre Punkte in ihr“ und dual dazu: „Die polareuklidische Metrik wird gegeben durch den absoluten Mittelpunkt und zwei imaginäre Strahlen in ihm.“

Steck (München).

Rachevsky, P.: Sur l'unicité de la géométrie projective dans le plan. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 107—119 (1940).

Es werden die üblichen ebenen Inzidenzaxiome zugrunde gelegt, daß zwei Punkte genau eine Gerade und zwei Geraden genau einen Punkt bestimmen, und daß es mindestens drei Punkte auf jeder Geraden und mindestens drei Geraden durch jeden Punkt gibt. Dazu kommt ein weiteres Inzidenzaxiom, das die Stelle der üblichen Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome vertritt, aber wesentlich schwächer als diese ist; es besagt: Wenn bei einer Kette von Perspektivitäten alle Punkte einer Geraden mit höchstens endlich vielen Ausnahmen fest bleiben, so bleiben alle Punkte der Geraden fest. — Man denkt sich jeder zusammenhängenden Konfiguration (n_3) einen Schließungssatz zugeordnet, der verlangt, daß jedesmal, wenn alle in der Konfiguration auftretenden Inzidenzen bis auf eine erfüllt sind, auch diese letzte erfüllt sein soll. Ist nun K eine solche Konfiguration (n_3), so wird die Frage gestellt: Gibt es zu K eine Geometrie, in der die angegebenen Axiome erfüllt sind, in der der zu K gehörige Schließungssatz gilt und in der kein nichttrivialer Schließungssatz mit weniger Punkten und Geraden gültig ist? Und es wird gezeigt: Wenn es zu K eine derartige Geometrie gibt, so ist K identisch mit der Konfiguration von Pascal oder mit der Konfiguration von Desargues oder mit der einzigen, aus der endlichen Geometrie mit 7 Punkten und Ge-

raden bekannten Konfiguration (7₃). — Der Beweis wird mit einer kombinatorischen Untersuchung der in den fraglichen Konfigurationen auftretenden kleinsten Ringe geführt; ein Ring ist dabei als ein System $P_{i_1} g_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_{l-2}} g_{i_{l-2}} P_{i_l}$ mit $i_1 = i_l$ definiert, in dem die P_{i_k} und g_{i_k} Punkte und Geraden der Konfiguration sind, von denen je zwei benachbarte inzidieren.

Bachmann (Marburg a. d. L.).

Cassina, Ugo: *Riduzione delle ipotesi nel teorema fondamentale della geometria proiettiva.* Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 389—402 (1940).

Verf. gibt hier Einzelausführungen zu einigen Fragen, auf die er in einer früheren Note kurz eingegangen war (dies. Zbl. 23, 154), insbesondere zum Fundamentalsatz der projektiven Geometrie und zur Einführung projektiver Koordinaten. Der Beweis des Fundamentalsatzes in der Cassinaschen Formulierung (Wortlaut a. a. O.) gelingt unter Berufung auf ein passendes System projektiver Koordinaten, in dem die Behauptung auf die bekannte Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(x^2) = f^2(x), \quad f(1) = 1$$

mit der Lösung $f(x) \equiv x$ hinausläuft. — Aus dem Fundamentalsatz folgt die metrische Aussage: Jede eindeutige Zuordnung zwischen eigentlichen Geraden, die die Mittelpunkte und die mittleren Proportionalen erhält, ist eine ähnliche Abbildung. — Die Einführung projektiver Koordinaten auf der Geraden gelingt durch fortgesetzte harmonische Teilung mit Hilfe eines Grenzprozesses auf Grund der Forderung: In der Folge der Punkte c_i , die zu gegebenen Punkten a, b, c_0 der Geraden aus $(c_n, a; b, c_{n-1}) = -1$ bestimmt ist, gibt es einen Punkt c_m so, daß ein gegebener Punkt p der Geraden, der zusammen mit b das Paar a, c_0 trennt, entweder mit c_m zusammenfällt oder zwischen c_m und c_{m+1} liegt. Abschließend folgt eine Bemerkung über die Funktionalgleichungen (I) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $f(x^2) = f^2(x)$; (II) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $f(xy) = f(x)f(y)$; (III) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $f(\sqrt{x}) = \sqrt{f(x)}$. I, II, III sind im Körper der reellen Zahlen äquivalent, und es gibt dort nur die Lösungen $f \equiv 0$ oder $f \equiv x$. Bei passender Spezialisierung des Variabilitätsbereiches („nicht-Staudtsche Körper“) gilt dies nicht mehr. Z. B. im Körper von $a + b\sqrt{2}$ (a, b rational) ist die Abbildung von $a + b\sqrt{2}$ auf $a - b\sqrt{2}$ eine Lösung von I und II; die durch III bestimmte Abbildung dieses Körpers auf sich ist dagegen nur die Identität oder $f \equiv 0$. *Moufang* (Essen).

Bukrejew, B. I.: *Aus dem Gebiete der hyperbolischen Geometrie.* Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 18, 57—68 u. dtsh. Zusammenfassung 69 (1940) [Ukrainisch].

Die Abhandlung hat folgende fünf Paragraphen: 1. Abstand zweier Punkte und Lobatschewskische Formel. 2. Spitzeck von Lambert. 3. Abstandskurven. 4. Grenzkreise. 5. Abbildung auf den Beltramischen Kreis. Die Untersuchung bedient sich der konformen Abbildung der Pseudosphäre auf die Poincarésche Halbebene und vermeidet projektivische Betrachtungen.

E. A. Weiss (Bonn).

Roeser, Ernst: *Konforme Abbildung der hyperbolischen Ebene und der Kugel auf die Grenzkugel.* Deutsche Math. 5, 299—305 (1940).

Diese Abbildungen werden durch eine einfache Konstruktion, ausgehend vom projektiven Modell Kleins vermittelt. Ihre Konformität wird rechnerisch an Hand der zugehörigen Abbildungsformeln nachgewiesen. Vermöge der längentreuen Beziehung, die zwischen der Grenzkugel und der euklidischen Ebene herrscht, stellen sich beide Abbildungen schließlich als die Übertragungen jener beiden bekannten konformen Modelle der sphärischen und hyperbolischen ebenen Geometrie (bei denen Geraden sich durch Kreise aus elliptischen oder hyperbolischen Bündeln darstellen) auf die Grenzkugel dar.

K. Strubecker (Wien).

Bottema, O.: *Das gleichseitige Tetraeder in der nichteuklidischen Geometrie.* Nieuw Arch. Wiskde 20, 253—257 (1940) [Holländisch].

Spiegelt man in der euklidischen Geometrie einen gegebenen Punkt A an den Achsen eines rechtwinkligen Achsensystems $Oxyz$, so bildet A mit den Spiegelbildern B, C, D ein

gleichseitiges Vierflach T . Ein solches hat unter anderen folgende bekannte Eigenschaften: 1. Je zwei Gegenkanten sind einander gleich. Die vier Seitenflächen sind kongruent. O ist sowohl Mittelpunkt der Umkugel wie der Inkugel und Schwerpunkt von T . Die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten steht auf diesen senkrecht. 2. Die Seitenflächen von T sind spitzwinklige Dreiecke. Jedes spitzwinklige Dreieck kann Seitenfläche eines gleichseitigen Vierflachs sein. Die Projektion einer Ecke auf die Gegenfläche liegt in der Eulerschen Geraden dieser Fläche. Die Höhe des Vierflachs ist gleich dem vierfachen Halbmesser der Inkugel. — Auch in der nichteuklidischen Geometrie gibt es gleichseitige Vierflache. Verf. beschränkt sich auf den Fall der hyperbolischen Geometrie und nimmt als absolute Fläche die Einheitskugel um O . Dann ist das oben konstruierte euklidische gleichseitige Vierflach $ABCD$ auch hyperbolisch gleichseitig. Für dieses hyperbolische gleichseitige Vierflach gelten zunächst alle oben unter 1. genannten Eigenschaften unverändert. Bezüglich der unter 2. zusammengefaßten Eigenschaften ergibt sich: In jeder Seitenfläche ist jeder Winkel kleiner als die Summe der beiden anderen. Jedes Dreieck mit dieser Winkелеigenschaft kann Seitenfläche eines gleichseitigen Vierflachs sein. Für die Höhe kann kein einfacher Ausdruck gefunden werden. Die Projektion einer Ecke des Vierflachs auf die Gegenseite liegt auf der Verbindungslinie des Schwerpunkts dieser Seite mit ihrem Umkreismittelpunkt.

Max Zacharias (Berlin).

Kerékjártó, B. de: Sur les groupes transitifs de la droite. Mat. termézet. Értes. 59, 455—474 u. franz. Zusammenfassung 475 (1940) [Ungarisch].

Es wird gezeigt, daß jede transitive Gruppe von Transformationen der Geraden in sich stetig ist. Hieraus lassen sich von neuem die Resultate von Brouwer gewinnen, nach denen eine solche Gruppe homöomorph ist entweder zur Gruppe der Translationen, der Affinitäten oder der Projektivitäten. *K. Reidemeister* (Marburg, Lahn).

Kerékjártó, B. de: Sur les fondements topologiques de la géométrie projective complexe. Mat. termézet. Értes. 59, 442—453 u. franz. Zusammenfassung 454 (1940) [Ungarisch].

Der Hauptsatz bietet die nachfolgende Kennzeichnung der Gruppe der ebenen Projektivitäten und Antiprojektivitäten: G sei eine kontinuierliche Gruppe topologischer Abbildungen der Kugelfläche auf sich von der Art, daß zu zwei beliebigen Punkttripeln A, B, C und A', B', C' genau zwei Abbildungen in G existieren, die A in A' , B in B' , C in C' überführen; dann ist G homöomorph der Gruppe der Projektivitäten und Antiprojektivitäten einer komplexen Veränderlichen. Weiterhin leitet Verf. mittels topologischer Schlußweisen die Sätze von É. Cartan, die sich auf die Darstellung der Projektivitäten durch Antiinvolutionen erster Art beziehen, ab. — Auszug.

Harald Geppert (Berlin).

Kerékjártó, B. de: Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. Mat. termézet. Értes. 59, 420—440 u. franz. Zusammenfassung 441 (1940) [Ungarisch].

Satz 1: Jede doppelt-transitive kontinuierliche Gruppe topologischer Abbildungen der Ebene auf sich selbst ist homöomorph der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen der euklidischen Ebene. Satz 2: Jede dreifach-transitive kontinuierliche Gruppe topologischer Abbildungen der Kugelfläche auf sich ist homöomorph der projektiven Gruppe einer komplexen Veränderlichen. — Erscheint auch im Journal de Math. pures et appl.

Harald Geppert (Berlin).

Montgomery, Deane, and Leo Zippin: Topological group foundations of rigid space geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 21—49 (1940).

Die Arbeit knüpft an die in Hilberts Grundlagen der Geometrie, Anhang IV, behandelten Fragen an und gibt eine Kennzeichnung der Bewegungen der Ebene und des Raumes als stetiger Gruppe. In der Ebene wird an Stelle des dritten Hilbertschen Axioms gefordert: Ist x_n, y_n eine Folge von Punktepaaren, welche gegen x, y konvergiert, und x'_n, y'_n eine solche Folge, welche gegen x', y' konvergiert, und gibt es Bewegungen, die x_n, y_n in x'_n, y'_n überführen, so gibt es auch eine Bewegung, die x, y in x', y' überführt. — Im Raum werden neben diesem Axiom und der Gruppeneigenschaft noch folgende Forderungen zugrunde gelegt: Es gibt einen Punkt p des Raumes, dessen Drehungsgruppe eine echte Untergruppe der Bewegungsgruppe ist. Die Menge

der Punkte, die aus einem Punkte p_n durch Drehungen um p hervorgehen, heißt Kugel um p . Dann gibt es eine Folge gegen p konvergierender Punkte p_n , welche auf Kugeln um p liegen, die mindestens zweidimensional sind. — Transformationsscharen, die den angegebenen Bedingungen genügen, sind euklidische oder nichteuklidische Bewegungen.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Löwner, Karl: Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Raume. *Ann. of Math.*, II. s. 40, 816—833 (1939).

Will man eine Inhaltslehre im Hilbertschen Raum (H. R.) aufbauen, die derjenigen im endlichdimensionalen euklidischen Raume nachgebildet ist, so stößt man auf prinzipielle Schwierigkeiten. Sollte eine Kugel vom Radius c im H. R. das Inhaltsmaß $I(c) > 0$ haben, so hätte man für jedes Paar positiver Zahlen a, b , mit $b < \frac{a}{2\sqrt{2}}$, und für jede ganze Zahl n die Ungleichung: $n \cdot I(b) \leq I(a)$, weil man in einer Kugel vom Radius a im H. R. beliebig viele paarweise fremde Kugeln vom Radius b angeben kann. Wegen der Gültigkeit des Archimedischen Axioms im Bereiche der positiven reellen Zahlen stellt diese Ungleichung eine Unmöglichkeit dar. Als Ausweg aus dieser Schwierigkeit schlägt der Verf. vor, die Inhaltswerte nicht aus dem Bereiche der positiven reellen Zahlen, sondern aus einem System von Größen zu nehmen, für die das Archimedische Axiom eben nicht gilt. — Unter einem Rotationskörper \mathfrak{R} des H. R. soll ein Körper verstanden werden, welcher alle Rotationen um einen endlichdimensionalen (den Punkt 0 nicht notwendig enthaltenden) Unterraum α des H. R. gestattet. Unter einer Rotation um α ist eine solche isometrische Abbildung des H. R. in sich zu verstehen, welche α punktweise invariant läßt. Jedem Rotationskörper \mathfrak{R} kann ein Radius $\varrho_{\mathfrak{R}}$ zugeordnet werden ($0 \leq \varrho_{\mathfrak{R}} \leq \infty$). Der Körper \mathfrak{R} heißt ein Rotativkörper, wenn er die Vereinigungsmenge einer Folge \mathfrak{R}_n von Rotationskörpern mit $\varrho_{\mathfrak{R}_n} \rightarrow 0$ ist. Es sind eben die beschränkten (und noch gewisse Regularitätsbedingungen erfüllenden) Rotativkörper, denen ein Inhaltsmaß zugeschrieben wird. In einem Sinne, der hier nicht näher erörtert werden kann, kann ein solcher Körper aus Kugelschalen aufgebaut werden, wobei die infinitesimale Schale zwischen den Radien $r, r+dr$ mit einem Gewicht $\mu(r)dr$ auftritt ($\mu(r)$ darf auch negative Werte annehmen). Diese reellwertige Funktion $\mu(r)$ wird dann eben als Inhaltsmaß des Körpers angesehen. Es wird gezeigt, daß diese Definition den grundlegenden Forderungen für einen Inhaltsbegriff entspricht. Ferner wird erörtert, inwiefern die in Betracht kommenden Funktionen $\mu(r)$ ein nicht-archimedisches Größensystem bilden.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Haenzel, G.: Geometrie und Wellenmechanik. 2. Diracsche Gleichung, Unschärfe und Vertauschbarkeit. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 50, 121—129 (1940).

Es handelt sich um eine Abbildung der 15 Diracschen Operatoren E_{ik} ($i, k=0, 1, \dots, 5$) auf die Ecken einer Brianchonschen Konfiguration. Die in den gleichberechtigten Formen der Diracschen Wellengleichung auftretenden Operatorenpentaden gehen bei der Abbildung in die auf derselben Tangente befindlichen Ecken über. Die Produkte $E_{0i}E_{0j}$, i fest, $j \neq i$, sind durch die Projektivität der auf den Tangenten p_0 und p_i liegenden Würfe auszulegen. — Die Verhältnisse aus der Wellenmechanik des Zweielektronensystems werden auf der Figur zweier perspektiver, demselben Kegelschnitt umschriebener Brianchonscher Sechseite versinnlicht. Das Vertauschbarkeitspostulat Heisenbergs entspricht dem involutorischen Charakter dieser Perspektivität des Grundkegelschnittes. Das Heisenbergsche Unbestimmtheitsprinzip ist nach Verf. auf den Gegensatz der projektiven und metrischen Geometrie zurückzuführen.

D. Barbilian (București).

Elementargeometrie. Darstellende Geometrie:

Guțu, Alexandru I.: Ein neuer Beweis einer klassischen elementaren Frage mit geometrischen und mechanischen Zusätzen. *Gaz. mat.* 46, 190—193 (1940) [Rumänisch].

Indirekter Beweis des Lehmus-Steinerschen Satzes: Ein Dreieck mit zwei gleichen

inneren Winkelhalbierenden ist gleichschenkelig. Der Beweis wird ausgedehnt auf die Fälle eines Dreiecks mit zwei gleichen Höhen und mit zwei gleichen Seitenhalbierenden.

Max Zacharias (Berlin).

Banning, J.: Über eine Erweiterung des Satzes von F. Morley. *Mathematica, Zutphen B 9*, 17—33 (1940) [Holländisch].

Eine ausführliche Behandlung der projektiven Erweiterung der Morleyschen Figur.
O. Bottema (Deventer, Niederlande).

Bruijn, N. G. de: Über die Hypozykloide von Steiner-Schläfli. *Nieuw Arch. Wiskde 20*, 282—287 (1940) [Holländisch].

W. van der Woude bewies in *Mathematica, Zutphen B 8*, 129—134 (1940) (dies. Zbl. 22, 382), daß die Tangenten in den Spitzen der Steinerschen Hypozykloide eines Dreiecks auf den Seiten des Morley-Dreiecks senkrecht stehen und durch den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises gehen. Verf. beweist dasselbe mit Hilfe einiger projektiven Sätze über rationale Kurven dritter Klasse mit einer Doppeltangente.

Max Zacharias (Berlin).

Wichers, J.: Über die Hypozykloide von Steiner-Schläfli und die Beziehung zum Dreieck von Morley. *Mathematica, Zutphen B 9*, 114—120 (1941) [Holländisch].

Verf. beweist rein geometrisch einige Eigenschaften der Steinerschen Hypozykloide, gibt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Rückkehrtangenten an und beweist den von W. van der Woude [*Mathematica, Zutphen B 8*, 129—134 (1940); dies. Zbl. 22, 382] analytisch bewiesenen Satz, daß diese Tangenten auf den Seiten des gleichseitigen Morley-Dreiecks senkrecht stehen.

Max Zacharias (Berlin).

Goormaghtigh, R.: Über einen dem Dreieck zugeordneten Kreis. *Gaz. mat. 46*, 187—189 (1940) [Rumänisch].

Durchläuft ein Punkt T den Umkreis eines Dreiecks $A_1A_2A_3$, so beschreibt der Schwerpunkt der in den Spiegelbildern von T bezüglich der Seiten A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 angebrachten Massen m_1, m_2, m_3 einen Kreis, dessen Lage und Eigenschaften untersucht werden: Er geht durch den Höhenpunkt und liegt bezüglich des Mittelpunkts des Feuerbachschen Kreises symmetrisch zu dem Kreis, der durch den Umkreismittelpunkt geht, und dessen Mittelpunkt in dem Dreieck $A_1A_2A_3$ die baryzentrischen Koordinaten m_1, m_2, m_3 besitzt.

Max Zacharias (Berlin).

Simionescu, Gh. D.: Eine Aufgabe der Dreiecksgeometrie. *Gaz. mat. 46*, 130—135 u. 185—187 (1940) [Rumänisch].

AA', BB', CC' seien drei Cevalinien des Dreiecks ABC mit dem Schnittpunkt ω mit den baryzentrischen Koordinaten α, β, γ . Auf BC, CA, AB werden die Senkrechten $A'M = m, B'N = n, C'P = p$ errichtet. Die Aufgabe lautet: Welcher Bedingungsgleichung müssen m, n, p genügen, damit sich AM, BN, CP in einem Punkt schneiden? Verf. findet die Gleichung

$$\sum \frac{mn}{\alpha + \beta} (\alpha b \cos A - \beta a \cos B) c \cos C - 2S \sum \frac{m}{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)} \alpha (\beta c \cos B - \gamma b \cos C) = 0$$

(S der Flächeninhalt des Dreiecks ABC).

Er untersucht insbesondere den Fall, daß die beiden in der Gleichung vorkommenden Summen je für sich gleich Null sind. In diesem Fall ergeben sich zwei Systeme von Lösungen $m = k \frac{a}{\alpha(\beta + \gamma)}, \dots$ und $m = k \frac{\cos A}{\beta + \gamma}, \dots$ (k ein Proportionalitätsfaktor). Läßt man k variieren, so beschreibt der Schnittpunkt der Cevalinien des ersten Systems die durch den Punkt ω gehende, dem Dreieck umbeschriebene gleichseitige Hyperbel, und der Schnittpunkt der entsprechenden Linien des zweiten Systems die Verbindungsgerade des Punktes ω mit dem Höhenpunkt des Dreiecks.

Max Zacharias.

Thalberg, Olaf M.: Figuren und trigonometrische Formeln. *Norsk mat. Tidsskr. 22*, 124—129 (1940) [Norwegisch].

Da die Seiten eines geradlinigen Dreiecks den Sinus der gegenüberliegenden Winkel proportional sind, kann man sie bei geeigneter Wahl der Längeneinheit gleich diesen

Sinus setzen. Erweitert man nun das Dreieck durch Hinzufügung gleichschenkliger Dreiecke, die zwei der Ecken zu Spitzen haben, so erhält man eine „sprechende“ Figur, in der einzelne Stücke auf verschiedene Weisen berechnet werden können. Dadurch gelangt man ganz von selber zu den verschiedensten goniometrischen Formeln, z. B. zu dem Additionstheorem des Sinus. Für denselben Zweck kann man die Figur eines Vierecks verwenden, das einem Kreise eingeschrieben ist, oder die eines rechtwinkligen Dreiecks, das ja einem Halbkreise eingeschrieben ist. *Engel* (Gießen).

Thébault, V.: Quadrangle bordé de triangles isocèles semblables. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I **60**, 64—70 (1940).

Sur la configuration constituée par un quadrangle convexe $ABCD$ bordé extérieurement ou intérieurement de quatre triangles semblables dont les angles à la base ont la valeur arbitraire α . Cas spéciaux: $AC = BD$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$. *O. Bottema* (Deventer).

Ilie, Ion: Bemerkungen über den Miquelschen Punkt. Gaz. mat. **46**, 299—301 (1941) [Rumänisch].

Miquelschen Punkt eines vollständigen Vierseits nennt Verf. den (historisch richtig als Poncelet-Steinerschen Punkt zu bezeichnenden) Schnittpunkt M der Umkreise der vier Dreiecke aus den Seiten des Vierseits. Durch eine Inversion mit dem Pol M werden diese vier Kreise in Seiten eines vollständigen Vierseits und die vier Seiten des ersten Vierseits in die Umkreise der Dreiecke aus den Seiten des zweiten Vierseits transformiert. Durch dieses Verfahren erhält Verf. u. a. folgende Sätze: Vier Kreise, die zu Durchmessern vier durch einen festen Punkt eines gegebenen Kreises gehende Sehnen haben, schneiden sich zu zweien in den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits. Es gibt in der Ebene eines vollständigen Vierseits mit den Gegeneckenpaaren A und C , B und D , E und F zwei (reelle oder imaginäre, verschiedene oder zusammenfallende) Punkte P derart, daß sich je zwei Kreise AMP und CMP , BMP und DMP , EMP und FMP orthogonal schneiden. Die Punkte P liegen auf dem Miquelschen Kreis des Vierseits (darunter versteht Verf. wieder historisch unrichtig den Kreis, auf dem nach Steiner die Mittelpunkte der vier Dreiecksumkreise zusammen mit ihrem gemeinsamen Schnittpunkt liegen). Sind M der Miquelsche Punkt und Ω der Mittelpunkt des Miquelschen Kreises, so gibt es eine Kardioid, die die Umkreise der vier Dreiecke berührt, den Punkt M zum Rückkehrpunkt und die Gerade $M\Omega$ zur Doppeltangente in diesem Rückkehrpunkt hat. *Max Zacharias* (Berlin).

Ziegenbein, P.: Konfigurationen in der Kreisgeometrie. J. reine angew. Math. **183**, 9—24 (1940).

Es handelt sich um die bekannte Miquel-Clifford-Konfiguration ($2^{n-1}, n$) von 2^{n-1} Kreisen und 2^{n-1} Punkten, bei denen jedes Element der einen Art mit n Elementen der anderen inzidiert. Für $n = 4$ ist diese Konfiguration bereits von Poncelet [Ann. Mat. pures appl. **8**, 1—13, 68—72 (1817)] und von Steiner [Ann. Mat. pures appl. **18**, 302—303 (1827); Werke I (1881), 223—224] gefunden worden. Den Fall $n = 5$ hat A. Miquel hinzugefügt [J. Math. pures appl. **10**, 349 (1845)]. Die Erweiterung für ein beliebiges $n > 5$ bewies W. K. Clifford [Messenger Math. **5**, 124—141 (1870); Math. papers **38** (1882)]. Man vergleiche E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt, S. 463—464, Leipzig 1901 und Enzykl. Math. Wiss. III AB 9, 1010. — Während Cliffords Beweis von allgemeinen kurventheoretischen Sätzen ausgeht, führt Verf. den Beweis für die Existenz der Konfiguration wie überhaupt die Beweise aller weiteren Sätze rein elementargeometrisch mit Hilfe eines einfachen Winkelskalküls. Der für den Beweis des Hauptsatzes wesentliche Hilfssatz 3 (Liegen von den acht Schnittpunkten von vier sich zyklisch schneidenden Kreisen vier, aus jedem Paar einer, auf einem Kreis, so gilt dies auch für die vier andern) wurde auch von J. de Gans aus einem Satz über bizirkuläre Quartiken abgeleitet [Chr. Huygens, Groningen **18**, 45—64 (1939)]. Der Beweis des Hauptsatzes (Satz 1) erfolgt durch vollständige Induktion. Auf dieselbe Art beweist Verf. (Satz 2),

daß alle Punkte der Konfiguration äquivalent sind; darunter versteht er, daß in ihnen die zwischen den gerichteten Kreisen auftretenden Winkel nach Größe und Reihenfolge gleich sind. Des weiteren beschäftigt sich Verf. mit gewissen als Einfach- und Doppelspiegelung bezeichneten Beziehungen zwischen zwei Konfigurationen ($2^{n-1}, n$). Einfach gespiegelt heißen zwei Konfigurationen A und B , wenn es einen Punkt P derart gibt, daß seine Spiegelbilder an den Kreisen von A die Punkte von B und seine Spiegelbilder an den Kreisen von B die Punkte von A sind. Doppelt gespiegelt heißen zwei Konfigurationen A und B dann, wenn es zwei Punkte P und Q derart gibt, daß die Spiegelbilder von P an den Kreisen von A die Punkte von B und die Spiegelbilder von Q an den Kreisen von B die Punkte von A sind. Verf. beweist die Existenz solcher einfach- und doppeltgespiegelten Paare für jedes $n \geq 1$. Bis zu $n = 5$ gibt es zu jeder gegebenen Konfiguration eine doppeltgespiegelte, bis zu $n = 3$ eine einfachgespiegelte. Im letzten Paragraphen weist Verf. die Existenz einer Kette doppeltgespiegelter Konfigurationen nach, in der je zwei aufeinanderfolgende Konfigurationen bezüglich eines für die ganze Kette konstanten Paares von Punkten doppeltgespiegelt sind.

Max Zacharias (Berlin).

Freudenthal, Hans: Zur Konstruktion von Tangentenpolygonen. *Nieuw Arch. Wiskde* 20, 273—278 (1940).

Es wird die Frage behandelt, ob ausgehend von den Seitenlängen l_1, l_2, \dots, l_n eines Tangentenpolygons das Polygon mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Die Antwort fällt für $n \leq 6$ bejahend, für $n > 6$ verneinend aus. Bei ungeradem n gibt es eine einzige (nicht sich selbst überschneidende) Lösung, bei geradem n dagegen unendlich viele. Werden auch Sternpolygone mit Selbstüberschneidungen zugelassen, so ist die Anzahl der Lösungen $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ -mal größer.

G. Hajós (Budapest).

Carosella, Alberto: Sull'esistenza di un fascio di cubiche trisecanti un angolo dato. *Period. Mat.*, IV. s. 20, 330—331 (1940).

Zu einem vorgelegten Winkel mit dem Scheitel O konstruiert Verf. zwei verschiedene rationale Kubiken mit dem Doppelpunkt O , die den Einheitskreis um O in je 4 Punkten schneiden, von denen der eine den Winkelbogen drittelt. Lineare Zusammensetzung führt zu einem ganzen Büschel derartiger Kubiken (vgl. auch dies. Zbl. 11, 222).

Harald Geppert (Berlin).

Cavallaro, Vincenzo G.: Sulla formula che esprime una distanza variabile in funzione di tre distanze assegnate. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 2, 501—502 (1940).

Es werden die Entfernungen einer Reihe gleich weit abstehender Punkte einer Geraden von einem festen Punkt außerhalb der Geraden betrachtet. Zunächst wird eine Formel, durch welche P. Buzano [*Boll. Un. Mat. ital.* (2) 2, 366—368 (1940); dies. Zbl. 23, 261] eine solche Entfernung durch die drei vorhergehenden ausgedrückt hat, nochmals bewiesen. Dann wird auf zwei Arten eine Formel abgeleitet, welche aus drei aufeinanderfolgenden dieser Entfernungen eine beliebige der weiteren bestimmt.

Wilh. Schmid (Dresden).

Gheorghiu, Adrian: Über einen Satz des Herrn General Gg. Buicliu. *Gaz. mat.* 46, 135—137 (1940) [Rumänisch].

Rein geometrischer Beweis der von D. V. Ionescu (vgl. dies. Zbl. 22, 73) angegebenen räumlichen Verallgemeinerung eines Satzes von Gh. Buicliu.

E. A. Weiss Bonn.

Ionescu, L.: Ornamentale Algebra. *Gaz. mat.* 46, 115—121, 171—178 (1940) u. 225—230 (1941) [Rumänisch].

Übersicht über den Inhalt des Buches *L'algèbre ornamentale* von E. Milick. Es ist das Ziel der ornamentalen Algebra, die Gleichungen (in kartesischen Koordinaten) von Kurven oder Figuren zu finden, die ein Ornament bilden, oder umgekehrt aus geeignet gebildeten Gleichungen solche Ornamente entstehen zu lassen. Im ersten Teile des Buches werden neue Zeichen eingeführt: Eine offene, liegende

Acht bedeutet Symmetrie, das Zeichen ε wird verwandt, um anzudeuten, daß nicht eine ganze algebraische Kurve, sondern nur ein Teil gemeint ist. Dann werden Beispiele für Gleichungen von Kurven mit einfacher, doppelter und mehrfacher Symmetrie und gleichzeitig Abbildungen dieser Kurven gegeben. Der zweite Teil des Buches behandelt verschiedene Aufgaben der Arithmetik und Geometrie, deren Lösung bei der Abfassung des ersten Teiles erforderlich war. *E. A. Weiss* (Bonn).

Palatini, Francesco: Classificazione dei poligoni piani convessi privi di lati paralleli. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **97**, Pt 2, 373—407 (1938).

Der Verf. betrachtet ein ebenes konvexes n -Eck $A_1 A_2 \dots A_n$ ohne parallele Seiten. Wenn die Verlängerung von $A_i A_{i+1}$ diejenige von $A_j A_{j+1}$ schneidet, so heißt der Schnittpunkt ein Cuspidalpunkt der Spezies $j - i - 1$; ist $n = 2k$ oder $n = 2k + 1$, so wird der Cuspidalpunkt punta genannt, und zwar „punta der Spezies m “ ($m > 0$), wenn die Spezies des Cuspidalpunktes gleich $k - 3 + m$ ist. Mittels dieser und verwandter Begriffe gibt der Verf. eine ausführliche Klassifikation der ebenen Vielecke. *O. Bottema* (Deventer, Niederlande).

Merz, K.: Heptaeder aus verschiedenen Netzen. Comment. math. helv. **13**, 49—53 (1940).

Es werden sieben „verschiedene“ Netze des Heptaeders angegeben. Der Ref. ist nicht in der Lage, anzugeben, was Verf. unter „verschiedenen Netzen“ versteht. Es wird nicht auf die Frage eingegangen, ob hiermit alle Möglichkeiten erschöpft sind.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Unkelbach, Helmut: Die kantensymmetrischen, gleichkantigen Polyeder. Deutsche Math. **5**, 306—316 (1940).

Es werden alle 20 im Endlichen gelegenen Polyeder ohne Selbstdurchdringungen angegeben, die lauter gleich lange Kanten haben, deren jede in einer Symmetrieebene des Polyeders liegt (Kantensymmetrie). Nach Bravais müssen sich die Symmetrieebenen in einem Punkte schneiden, dieser wird als Mittelpunkt einer Kugel genommen, auf welche die Polyeder projiziert werden können. Man sucht somit zunächst aus der Aufstellung von E. Hess (Einleitung von der Lehre von der Kugelteilung, 1883) alle kantensymmetrischen Kugelnetze heraus. Ein sphärisches n -Eck eines solchen Kugelnetzes bestimmt zusammen mit dem Mittelpunkt der Kugel ein n -Kant, und die weitere Aufgabe besteht darin, einem solchen ein ebenes, gleichseitiges n -Eck derart einzubeschreiben, daß das erzeugte Polyeder ohne Selbstdurchdringung ist. — Läßt man eine der vier Bedingungen: im Endlichen gelegen, ohne Selbstdurchdringung, gleichkantig, kantensymmetrisch, fallen, so erhält man je eine kontinuierliche Schar von Polyedern, die den übrigen drei Bedingungen genügen.

J. J. Burckhardt.

Hadwiger, H.: Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope. Comment. math. helv. **13**, 90—107 (1941).

Ein System von n vom festen Punkt O ausgehenden Vektoren a_1, a_2, \dots, a_n eines s -dim. Vektorraumes R_s heißt Vektorstern \mathfrak{S}_n ; er sei vom Range s ($n \geq s$). Ziel der Arbeit ist es, einige durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Typen von Vektorsternen in gegenseitige Beziehung zu bringen. Es ergeben sich folgende 8 Sätze: 1. Ein \mathfrak{S}_n ist dann und nur dann ein Koordinatenstern, wenn er ein Pohlkescher Normalstern ist. 2. Ein \mathfrak{S}_n ist dann und nur dann ein Koordinatenstern, wenn die s nicht verschwindenden Eigenwerte der Gramschen Matrix von \mathfrak{S}_n alle 1 sind. 3. Ein \mathfrak{S}_n ist dann und nur dann Pohlkescher Normalstern, wenn die s nicht verschwindenden Eigenwerte der Gramschen Matrix von \mathfrak{S}_n alle 1 sind. 4. Jeder einer Kugel vom Radius $1/\sqrt{s/n}$ einbeschriebene regelmäßige \mathfrak{S}_n ist ein Koordinatenstern, also auch ein Pohlkescher Normalstern. 5. Jeder einer Kugel vom Radius $1/\sqrt{s/n}$ einbeschriebene reguläre \mathfrak{S}_n ist ein Koordinatenstern, also auch ein Pohlkescher Normalstern. 6. Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P -Büschel, wenn die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel den minimalen Wert n^2/s annimmt. 7. Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P -Büschel, wenn die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel der Büschelgeraden mit einer veränderlichen Geraden konstant ausfällt. Die

fragliche Konstante ist n/s . 8. Die vom Mittelpunkt eines regulären Polytopes durch die Eckpunkte gelegten Geraden bilden ein P -Büschel. Zur Verifikation dieses Satzes ist eine Tabelle für die regulären Polytope ($n = 2, 3, 4, s$) mit den nötigen Daten zusammengestellt. Definitionen siehe Originalarbeit. Erweiterung einer Arbeit von E. Stiefel [Comment. math. helv. **10**, 208—225 (1939); dies. Zbl. **18**, 326].

W. Nowacki (Bern).

Graf, Ulrich: Anaglyphen aus parallelprojizierten Teilbildern. Deutsche Math. **5**, 317—321 (1940).

Die bekannte Tatsache, daß zwei Zentral- oder Parallelrisse eines Objekts auf verschiedene Bildebenen unter gewissen Voraussetzungen eine Anaglyphe darstellen, wird am Auf-Kreuzriß-Verfahren illustriert. Das zweite Beispiel (Grundriß-Parallelschatten) ergänzt als Sonderfall zweier Parallelprojektionen auf dieselbe Bildebene frühere Ausführungen (dies. Zbl. **19**, 275 u. **21**, 347).

H. Horninger (Berlin).

Sauer, Robert: Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme mit Hilfe der dualen Kräfteabbildung. Z. angew. Math. Mech. **20**, 174—180 (1940).

Als Sonderfall einer projektiven Kräfteabbildung wird eine duale Kräfteabbildung folgendermaßen entwickelt: Einer gegebenen räumlichen Kraft mit den Plückerschen Koordinaten $k_1, k_2, k_3, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ wird umkehrbar eindeutig eine Bildkraft mit den Koordinaten k'_1, \bar{k}'_1 durch $k'_1 = k_1, k'_2 = k_2, k'_3 = k_3; \bar{k}'_1 = c \cdot \bar{k}_1, \bar{k}'_2 = c \cdot \bar{k}_2, \bar{k}'_3 = c \cdot \bar{k}_3$ zugeordnet, wobei c eine nicht verschwindende, willkürliche, jeweils nach den vorliegenden Maßverhältnissen zu wählende Konstante ist. Durch diese Abbildung werden die Kraftvektoren eines Bündels in ein ebenes Kräftefeld und die Kräftepaare des Raumes in ein Parallelkräftebündel verwandelt; die Zuordnung umschließt also die bekannten Abbildungen der Kraftvektoren nach Mises und der Momentvektoren nach Prager. Man erreicht durch die duale Kräftetransformation, daß sich alle Zusammenfassungen und Zerlegungen räumlicher Kräftesysteme auf einfache und durchsichtige Art mit den Hilfsmitteln der ebenen graphischen Statik in einer Zeichenebene durchführen lassen. Nach der Diskussion der wichtigsten Sonderfälle wird der Nutzen dieses Verfahrens an den beiden wichtigsten Grundaufgaben der graphischen Statik räumlicher Kräftesysteme, nämlich der Konstruktion der resultierenden Kraftschraube sowie eines resultierenden Kraftkreuzes für ein nichtspezielles Kräftesystem, erwiesen.

U. Graf (Danzig).

Projektive und algebraische Geometrie:

Bottema, O.: Über affine Invarianten bei quadratischen Formen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **43**, 866—873 (1940).

R. Weitzenböck hat die Invarianten einer quadratischen Form und einer Linearform gegenüber der speziellen affinen Gruppe in der Ebene und im Raum untersucht (vgl. dies. Zbl. **23**, 65). Er hat dabei in der Ebene einfache geometrische Deutungen von zwei absoluten Invarianten gegeben, durch die alle übrigen ausgedrückt werden können. Diese absoluten Invarianten werden hier durch zwei andere k, l ersetzt. Eine von ihnen ist auch eine absolute Invariante der quadratischen Form allein, die zweite ist eine simultane Invariante der quadratischen und der linearen Form zugleich auch gegenüber der allgemeinen affinen Gruppe. Dabei ist $k = \varrho^3$, wo ϱ den affinen Krümmungshalbmesser des Kegelschnitts bezeichnet. Für $l' = \frac{l}{l-1}$ wird folgende Deutung angegeben: Sind P und Q die Schnittpunkte der Geraden und des Kegelschnitts, A und B die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der zur ersten Geraden durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts gezogenen Parallelen, so wird $l' = (PQ:AB)^2$. Berechnung des Flächeninhalts der Segmente, in welche eine Gerade eine Ellipse teilt, mittels eines speziellen Koordinatensystems. Übertragung der Ergebnisse auf den R_n .

E. A. Weiss (Bonn).

Woude, W. van der: Über vier Gerade in R_4 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 946—954 (1940).

Im R_4 haben vier Geraden allgemeiner Lage eine fünfte assoziierte. Neben zwei Ausnahmefällen behandelt Verf. ausführlich den besonderen Fall, in dem die vier vorgegebenen Geraden eine gemeinsame Treffgerade haben. In diesem Falle gibt es ∞^1 assoziierte Geraden. Sie erfüllen eine Regelfläche 3. Ordnung F . Das System aller Ebenen, welche die vier vorgegebenen Geraden schneiden, zerfällt in das System der Ebenen durch die gemeinsame Transversale und in ein zweites Ebenensystem. Die Regelfläche F ist der geometrische Ort aller Punkte Q , in welchen sich unendlich viele Ebenen des zweiten Systems schneiden. Die durch einen Punkt Q laufenden Ebenen des zweiten Systems bilden einen quadratischen Kegel mit Q als Spitze. F und das zweite Ebenensystem ändern sich nicht, wenn man die Ausgangsgeraden durch vier andere Erzeugende von F ersetzt. [Vgl. R. Weitzenböck, Zur projektiven Geometrie des R_4 . S.-B. Akad. Wiss. Wien 121, Abt. IIA, 2553—2633 (1912).] E. A. Weiss.

Bottema, O.: Absolute Invarianten von fünf Geraden in R_4 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 1011—1015 (1940).

Fünf Geraden l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 des R_4 haben nach R. Weitzenböck (vgl. z. B. dies. Zbl. 20, 389) Invarianten der Gestalt $A_{i,jk,rs}$. Das Verschwinden von $A_{i,jk,rs}$ bedeutet, daß die Gerade l_i die Schnittebene der Verbindungsräume $l_j l_k$ und $l_r l_s$ schneidet. Die Invarianten $A_{i,jk,rs}$ mit verschiedenen Indizes sind in den Koordinaten jeder der fünf Geraden linear. Der Quotient zweier derartiger Invarianten ist daher eine absolute Invariante der fünf Geraden. Für diese Invarianten gibt Verf. eine geometrische Deutung. Es sei m_{rs} die Transversale der Geraden l_i, l_j, l_k und n_{rs} die Transversale der Geraden m_{rs}, l_r, l_s . Dann wird m_{rs} von den vier Geraden l_i, l_j, l_k, n_{rs} in den vier Punkten $P_{i,rs}, P_{j,rs}, P_{k,rs}, P_{rs}$ geschnitten, und es wird:

$$\frac{A_{i,jk,rs}}{A_{k,ij,rs}} = -DV(P_{k,rs}, P_{i,rs}, P_{j,rs}, P_{rs}) = -D_{kij}.$$

So ist eine einfache Deutung des Quotienten von zwei Invarianten $A_{i,jk,rs}$ gefunden, die in zwei Indizes übereinstimmen. Die übrigen Quotienten sind Produkte von zwei oder drei Ausdrücken D_{kij} . Die Größen D_{kij} sind nicht unabhängig. Sie können aus fünf von ihnen bestimmt werden.

E. A. Weiss (Bonn).

Coxeter, H. S. M.: The polytope 2_{21} , whose twenty-seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface. Amer. J. Math. 62, 457—486 (1940).

Die Gruppe $[3^2, 2, 1]$ der $6! \cdot 72 = 51840$ Permutationen der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, die nach Schläfli 36 Doppelsechser bilden, wird erzeugt durch fünf Operationen der Ordnung zwei, die gegenüberliegende Seiten eines Doppelsechсers vertauschen, und eine Operation, welche die beiden Paare von je sechs Geraden eines anderen Doppelsechсers miteinander vertauscht. Da es unter den 27 Geraden der F^3 zu je zwei sich schneidenden Geraden a_1 und b_2 und einer zu beiden windschiefen Geraden b_1 stets eindeutig eine vierte Gerade a_2 gibt, die a_1 und b_2 schneidet und zu b_1 windschief ist, ordnet man sich schneidenden Geraden gegenüberliegende Eckpunkte, windschiefen die anliegenden Eckpunkte eines Parallelogramms zu. Auf diese Weise können die Inzidenzen der 27 Geraden der F^3 dargestellt werden als die 27 Eckpunkte dreier konzentrischer Neunecke oder zweier Zwölfecke, wobei im letzteren Falle der Mittelpunkt dreifach zählt. Diese werden sodann aufgefaßt als ebene Projektionen von T. Gossets halbreulärem Polytop 2_{21} , das 27 Ecken hat, wobei jede 16 benachbarte besitzt, somit eine sechsdimensionale Darstellung der 27 Geraden der F^3 liefert. Nach Witting und H. Burkhardt wird sodann die Gruppe $[3^2, 2, 1]$ im komplexen R^3 als Kollineationsgruppe dargestellt und der Zusammenhang mit Eltes Polytop 1_{22} ausgeführt. Eine quaternäre Kollineationsgruppe wird angegeben, welche dieselbe Gruppe erzeugt. Diese wird nach Frame dargestellt in der endlichen Geometrie $PG(3, 4)$. Zuletzt wird gezeigt, wie $[3^2, 2, 1]$ Untergruppe vom Index 6720

in der Gruppe $[3^4, 2, 1]$ von Gossets halbregulärem Polytop 4_{21} ist, und die Korrespondenz zwischen 4_{21} und den 27 Geraden der F^3 aufgestellt. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Sintsov, D.: Théorie générale du connexe aux éléments (point, droite) dans l'espace. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 5, 31—57, ukrain. Zusammenfassung 57—61 u. franz. Zusammenfassung 61—71 (1940) [Russisch].

Der Verf. hat sich seit 1892 mit den Konfigurationen beschäftigt, die durch Clebschsche Konnexionen dargestellt werden, und von denen auch A. Voss besondere Fälle behandelt hat, namentlich die Punkt-Ebenensysteme im R_3 . Hier geht er ausführlicher ein auf die Konnexionen des R_3 , deren Gleichung die Form hat:

$$f(x_1, \dots, x_4, p_{12}, \dots, p_{34}) = 0,$$

wo die p_{ik} Linienkoordinaten sind, also auf die Punkt-Geradensysteme des R_3 , die auch E. Biondori schon betrachtet hat. Hiernach ist eine Angabe in Berzolari's „algebraischen Transformationen und Korrespondenzen“ [Encykl. d. Math. $\mathfrak{3}_2$, H. 12 (1933); dies. Zbl. 8, 80] zu berichtigen. Ist f vom Grade m in den x und vom Grade r in den p , so hat der Konnex die Ordnung m und den Rang r . Es werden nun die Elemente x, p des Konnexes betrachtet, bei denen der Punkt x singular ist, oder die Gerade p , oder alle beide. Ferner die „Koinzidenzen“, die von den gemeinsamen Elementen x, p zweier oder mehrerer Konnexionen gebildet werden. Jeder Punkt X_i bestimmt einen Polarkonnex: $\sum X_i (\partial f / \partial x_i) = 0$ und jede Gerade P_{ik} eine ganze Schar von Polarkonnexionen:

$$\sum P_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + f_{r-2}(x, p) \frac{\partial}{\partial p_{ik}} (p_{12} p_{34} + p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24}) \right) = 0,$$

wo f_{r-2} eine beliebige Funktion bezeichnet, die in den x den Grad m und in den p den Grad $r - 2$ hat. Die hierdurch definierten Koinzidenzen führen auf verschiedene Arten von singulären Elementen x, p . Die Elemente des Konnexes, bei denen Punkt und Gerade vereinigt liegen, bilden die Hauptkoinzidenz, durch die eine Mongesche, oder im Falle $r = 1$ eine Pfaffsche Gleichung bestimmt wird, und so weiter. Auf Einzelheiten einzugehen, ist hier nicht möglich. Erwähnt sei nur, daß ein bilinearer Konnex ($m = r = 1$) eine Pfaffsche Gleichung liefert, deren Koeffizienten ganze Funktionen 2. Grades der x sind. *Engel* (Gießen).

Woude, W. van der: Über das orthogonale Punktsextupel. Nieuw Arch. Wiskde 20, 258—268 (1940) [Holländisch].

Ein Punktsextupel heißt orthogonal, wenn die Verbindungsebene von irgend drei seiner Punkte auf der Verbindungsebene der drei übrigen senkrecht steht. Diese von Th. Reye synthetisch untersuchte Figur wird hier analytisch im nichteuklidischen und euklidischen Raume behandelt. Sind ξ_1, \dots, ξ_6 die sechs Punkte, so stellt $\sum_{\varrho=1}^6 s_{\varrho} \xi_{\varrho}^2 = 0$ eine Fläche 2. Klasse dar, bezüglich deren die Punkte ein Polsextupel bilden. Sind vier der Punkte ξ_1, \dots, ξ_4 die Eckpunkte des Koordinatentetraeders und ist $\sum_{i,k}^{1, \dots, 4} A_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ eine vorgegebene Fläche 2. Klasse, so hat man, um die vier Punkte zu einem Polsextupel zu ergänzen, zwei lineare Formen ξ_5, ξ_6 so zu bestimmen, daß $\sum_{i,k}^{1, \dots, 4} A_{ik} \xi_i \xi_k \equiv \sum_{\varrho=1}^6 s_{\varrho} \xi_{\varrho}^2$. Dann muß die Fläche 2. Klasse $\sum_{i,k}^{1, \dots, 4} A_{ik} \xi_i \xi_k - \sum_{i=1}^4 s_i \xi_i^2$ vom Range 2 werden. Verf. wählt s_1 willkürlich und bestimmt s_2, s_3, s_4 so, daß die dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden. Jedem Parameter s_1 entspricht dann eine Gerade b , auf der eine Involution der gesuchten Punktepaare liegt. Variiert s_1 , so beschreibt b eine Regelfläche 2. Ordnung, und die Ruhepunkte der auf b liegenden Involution erfüllen eine Raumkurve 4. Ordnung. Die Regelfläche wird im euklidischen Falle ein orthogonales Hyperboloid. Sonderfälle. *E. A. Weiss* (Bonn).

Nikoulin, N. A.: An instrument for drawing a curve of the third order with a double point. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, 121—124 u. engl. Zusammenfassung 124 (1940) [Russisch].

Der dem Instrument zugrunde liegende Gedanke beruht auf folgendem Satze von Newton: Drehen sich zwei konstante Winkel so um ihre Scheitel, daß der Ort der Schnittpunkte von zwei Schenkeln einen Kegelschnitt beschreibt, so beschreibt der Schnittpunkt der beiden anderen Schenkel eine rationale Kurve 4. Ordnung. Läuft der Kegelschnitt durch einen der beiden Scheitel, so wird die erzeugte Kurve eine Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt im anderen Scheitel. *E. A. Weiss.*

Sanders, J. M.: Über die ebenen Kurven dritter Ordnung vom Geschlechte Eins. Mathematica, Zutphen 9, 65—89 (1940) [Holländisch].

Sz. Nagy, Gyula v.: Über die Kurven n -ter Ordnung im projektiven q -dimensionalen Raum für $n < 2q$. J. reine angew. Math. 183, 1—8 (1940).

Die vorliegende Untersuchung hat als Gegenstand die reellen Kurven eines reellen projektiven q -dimensionalen Raumes R_q . Eine einzügige Kurve ist ein reelles, eindeutiges, stetiges Kreisbild, das mit jeder Hyperebene eine endliche Anzahl von Punkten gemein hat; eine mehrzügige Kurve besteht aus mehreren einzügigen Kurven; Ordnung einer Kurve ist die Maximalanzahl der gemeinsamen Punkte der Kurve mit einer Hyperebene (jeder Punkt mit der entsprechenden Vielfachheit gerechnet). Es sei $K_n^{(q)}$ eine Kurve der Ordnung n im Raume R_q . Hauptziel des Verf. ist, folgenden Satz zu beweisen: Die Gesamtanzahl der Züge und Doppelpunkte der Kurven $K_n^{(q)}$ ist höchstens $n + 1 - q$, falls $n < 2q$ ist. Dieser Satz wird zunächst mit Beispielen in den Fällen $q = 2$, $q = 3$ illustriert; in der Ebene ($q = 2$) beträgt jene Gesamtanzahl höchstens $n - 1$, falls $n < 4$ ist; zu jeder positiven ganzen Zahl m und zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl k gibt es aber ebene Kurven $K_4^{(2)}$, die aus m Zügen bestehen und k Doppelpunkte besitzen. So hat für $q = 3$ jene Gesamtanzahl für eine $K_6^{(3)}$ höchstens den Wert $n - 2$, falls $n < 6$ ist; es gibt aber Kurven $K_6^{(3)}$, die aus beliebig vielen Zügen bestehen. Der Beweis des allgemeinen Satzes beruht auf der Betrachtung der Punkte, wo $K_n^{(q)}$ von einer geeigneten Hyperebene geschnitten wird, einer Hyperebene nämlich, die alle d Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ enthält und deren weitere bestimmende Punkte (höchstens $q - d$) auf den verschiedenen Zügen von $K_n^{(q)}$ in geeigneter Weise verteilt sind; aus dem Umstand, daß die Anzahl jener Punkte den Wert n nicht übersteigen kann, folgert man den gewünschten Schluß. Es folgt ohne Schwierigkeit die Ausdehnung auf Kurven $K_n^{(q)}$ mit mehrfachen Punkten beliebiger Art. — Die Anwendung dieser Sätze auf die Projektion von $K_n^{(q)}$ von einem Punkte aus auf eine Hyperebene liefert weitere Sätze; so z. B.: hat $K_n^{(q)}$ m Züge, d wirkliche Doppelpunkte und t scheinbare Doppelpunkte in bezug auf einen außerhalb von $K_n^{(q)}$ liegenden Punkt, und ist $n < 2q - 2$, so ist auch $m + d + t \leq n + 2 - q$. Anwendung auf die Kurven $K_n^{(q)}$, $K_n^{(n-1)}$, $K_n^{(n-2)}$ und andere Anwendungen. *E. G. Togliatti* (Genova).

Leidheuser, R. W.: Sulla ipersuperficie di ordine 4 dello spazio a 4 dimensioni, generabile con 4 stelle omografiche di iperpiani e la sua rappresentazione su di uno spazio a 3 dimensioni. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 1, 320—354 (1940).

In einem projektiven Raume S_4 betrachtet Verf. vier zueinander projektive Hyper-ebenensterne. Vier sich korrespondierende Hyperebenen $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ schneiden sich in einem Punkte P : der Ort des Punktes P ist eine rationale und normale Hyperfläche der Ordnung 4: $V_3^4 \cdot V_3^4$ kann birational auf einen Raum S_3 abgebildet werden, indem man eine Projektivität zwischen den Punkten des S_3 und den Hyperebenen π_1 betrachtet und jedem Punkte des S_3 den Punkt der V_3^4 , wo sich $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ schneiden, entsprechen läßt. Das System der hyperebenen Schnitte der V_3^4 wird damit im S_3 ein System von $\infty^4 F_2^4$, die einfach durch eine Basiskurve C^{10} hindurchgehen; zwei F_2^4 schneiden sich, außer C^{10} , längs einer veränderlichen Kurve C^6 , die in 20 Punkten die C^{10} schneidet. — Umgekehrt existiert, nach Halphen, ein lineares System $|F^4|$

von $\infty^4 F_3^4$, das eine irreduzible Basiskurve C^{10} des Geschlechtes 11 besitzt und folgende Eigenschaften hat: C^{10} wird von den Ebenen des S_3 in 10 Punkten, die nicht auf einer C_3 liegen, geschnitten; zwei F_3^4 schneiden sich längs C^{10} und einer veränderlichen C^6 des Geschlechtes 3, die keine Vierseckanten besitzt. Alsdann kann dieses System als Bild der hyperebenen Schnitte einer V_3^4 des S_4 , die von vier zueinander projektiven Hyperebenensternen erzeugt wird, betrachtet werden. — Den Ebenen des S_3 entsprechen auf V_3^4 Flächen V_2^6 , die ein homaloidisches System bilden. Durch eine V_2^6 gehen $\infty^3 V_3^3$, die auf der V_3^4 ein zweites homaloidisches System von \bar{V}_2^6 ausschneiden. Die Flächen \bar{V}_2^6 werden im S_3 von F_3^{11} , die dreifach durch C^{10} gehen und ein homaloidisches System $|F^{11}|$ bilden, dargestellt. Dem genannten homaloidischen System entspricht eine interessante Cremonatransformation des S_3 . — Die V_3^4 besitzt 20 Doppelpunkte. — Die Geraden der V_3^4 bilden zwei Regelflächen der Ordnung 20 und des Geschlechtes 11 und zwei Regelflächen der Ordnung 140 und des Geschlechtes 1721. Im S_3 sind die Bilder der Regelflächen der Ordnung 20: die Basiskurve C^{10} und die Jacobische Fläche des Systems $|F^{11}|$; die Bilder der Regelflächen der Ordnung 140: die Regelfläche der Dreieckanten der C^{10} und die Fläche der Kegelschnitte, die die C^{10} 8mal schneiden. — Ferner werden auch einige Eigenschaften der Kegelschnitte der V_3^4 untersucht. — Trotz der Einfachheit des Gegenstandes erfordert die ganze Untersuchung die Anwendung ziemlich tiefliegender Sätze der algebraischen und abzählenden Geometrie.

Conforto (Rom).

Bonera, Piero: *Sulle superficie razionali di S_4 aventi un assegnato numero di punti doppi impropri.* Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 281—317 (1940).

In einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 21, 152) hat sich Verf. mit der Bestimmung der rationalen Flächen F^n des S_4 bei gegebener Anzahl d der (im Severischen Sinne) uneigentlichen Doppelpunkte befaßt, wobei er F^n durch ein ebenes Kurvensystem Φ niedrigster Ordnung m mit σ Basispunkten der Vielfachheiten $r_1 : \dots : r_\sigma$ darstellte. Bedeutet $\theta \geq 0$ die Zahl der erforderlichen linearen unabhängigen Bedingungen, um Φ in dem vollständigen System $|\Phi|$ auszuzeichnen, so gelten die arithmetischen Beziehungen: $2(5\theta + \sigma - d + 17) = n(15 - n)$; $n = m^2 - \sum r_i^2$; $\sum r_i = 3m + n - 2\theta - 8$; $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_\sigma$; $r_1 + r_2 + r_3 \leq m$. In der genannten Arbeit hatte Verf. den Fall $\sigma < 9$ erledigt; jetzt nimmt er die Fälle für $\sigma \geq 9$ in Angriff und beweist an Hand der obigen Beziehungen, daß bei Vorgabe von $d, n (\geq 3), \theta, \sigma$ sich für m eine obere und untere Grenze angeben läßt, so daß also zu vorgegebener Doppelpunktzahl d nur endlich viele verschiedene Typen rationaler F^n des S_4 gehören. Diese stellt Verf. für den Fall $d = 0$ vollständig auf; es ergeben sich 12 Typen von Flächen der Ordnungen $3 \leq n \leq 9$, die durch Angabe ihrer Bildsysteme Φ vollständig gekennzeichnet werden.

Harald Geppert (Berlin).

Bonera, Piero: *Sulle superficie razionali di S_4 con uno o due punti doppi impropri.* Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 650—656 (1940).

Auf Grund der vorstehend besprochenen Ergebnisse sucht Verf. nun alle Typen rationaler F^n des S_4 auf, für die $d = 1$ oder 2 ist. Zu $d = 1$ finden sich 5 Typen der Ordnungen $4 \leq n \leq 9$, darunter drei Normalflächen mit $n = 7, 8, 9$; für $d = 2$ ergeben sich 5 Typen der Ordnungen $6 \leq n \leq 10$, darunter drei Normalflächen mit $n = 8, 9, 10$.

Harald Geppert (Berlin).

Spampinato, Nicolò: *Sulla caratterizzazione geometrica delle varietà caratteristiche e pseudocaratteristiche dello spazio reale euclideo.* Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 1, 255—262 (1940).

Der komplexe Raum S_n läßt sich als reeller euklidischer Raum S_{2n} darstellen. Nach Erweiterung des S_{2n} ins Komplexe kennzeichnet Verf. die charakteristischen Mannigfaltigkeiten M_{2k} des S_{2n} (d. h. die Bilder der komplexen analytischen Mannigfaltigkeiten von k Dimensionen im S_n) als Schnitte von Paaren konjugiert komplexer Zylinder von $k + n$ Dimensionen, deren Erzeugende n -dimensionale Räume von fester Lage sind, die durch je zwei zyklische S_{n-1} des S_{2n} bestimmt werden (vgl. Severi, dies.

Zbl. 19, 423). Ausdehnung auf die pseudocharakteristischen Mannigfaltigkeiten, die in charakteristischen Mannigfaltigkeiten enthalten sind. *E. Martinelli* (Roma).

De Franchis, Michele: I sistemi canonici e pluricanonici e le forme algebrico-differenziali di prima specie. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 243—249 (1940).

Einige Gedanken und Methoden des Verf. über die Konstruktion der kanonischen Systeme auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit werden hier wieder dargestellt, da diese von anderen Verff. nicht beachtet worden sind (dies. Zbl. 17, 223). Es wird zunächst die Definition der kanonischen Linearschar auf einer algebraischen Kurve wiederholt [Palermo Rend. 36, 165 (1912)]; es folgt die Ausdehnung auf algebraische Flächen und höhere Mannigfaltigkeiten (dies. Zbl. 5, 410); der Grundgedanke ist immer die Betrachtung der Null- und der Pol-Mannigfaltigkeiten gewisser rationaler Funktionen auf der gegebenen Mannigfaltigkeit. Alles das wird mit der Theorie der Differentialformen in Verbindung gesetzt. Schließlich wird auch der Fall einer einfachen Differentialform $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ betrachtet. *E. G. Togliatti*.

Differentialgeometrie:

Tzénoff, Iv.: Points simples et points singuliers des courbes planes. Enseignement Math. 38, 92—116 (1940).

Verf. entwickelt zur Untersuchung der Punkte einer ebenen Kurve, zunächst mit einer Gleichung von der Form $\varphi(x, y) = 0$, eine durch Einführung der Vektoren

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{MM_1} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j},$$

wo M und M_1 zwei benachbarte Kurvenpunkte sind, ermöglichte geometrische Methode, die es gestattet, die verschiedenen Arten der gewöhnlichen und der singulären Punkte (wenigstens der Doppel- und der dreifachen Punkte) ohne viele Mühe aufzuzählen. Er gibt dazu lehrreiche Einzelbeispiele. In einem zweiten Teil behandelt er ebene Kurven, die durch eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben sind, ebenfalls vektoriell: dieses Verfahren unterscheidet sich indes nur in der gewählten Schreibweise von dem der Graßmannschen Vektorrechnung, wie es etwa von Mehmkke in der Z. Math. Phys. 35, 1 (1890) in kinematischer Form dargestellt ist. Auch hier sind Beispiele hinzugefügt. *Fladt* (Tübingen).

Abramescu, N.: Eigenschafte der oskulierenden Kegelschnitte einer ebenen Kurve. Gaz. mat. 46, 23—27 u. 59—64 (1940) [Rumänisch].

Nimmt man als x - und y -Achse die Tangente und die Normale einer ebenen Kurve in einem ihrer Punkte M , so erhält der in M vierfach berührende Kegelschnitt eine Gleichung der Gestalt: $ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2dy = 0$. Die Koeffizienten dieser Gleichung, die Koordinaten des Mittelpunktes des oskulierenden Kegelschnittes und die Gleichung der Affinnormale im Punkte M werden angegeben unter der Voraussetzung, daß die Gleichung der Kurve in der Gestalt $\varrho = F(\alpha)$ gegeben ist (ϱ Krümmungsradius im Punkte M , α Winkel der Tangente im Punkte M mit einer festen Richtung). Die Winkelnormale im Punkte M wird nach Tzitzeica [Gaz. mat. 9, 100 (1905)] folgendermaßen erklärt: Zwei dem Punkte M benachbarte Kurvenpunkte M_1, M_2 seien so gewählt, daß MM_1 und MM_2 mit der Kurvennormale im Punkte M den gleichen Winkel bilden. Es sei X die Mitte von M_1M_2 . Der Ort für alle Punkte X ist eine durch M laufende Kurve. Deren Tangente im Punkte M ist die Winkelnormale. Bringt man M_1M_2 mit der Tangente im Punkte M zum Schnitt und geht man zur Grenze über, so geht der Schnittpunkt gegen einen Punkt T'_a . Die vom Krümmungsmittelpunkt auf die Affinnormale gefällte Senkrechte schneidet die Tangente in einem Punkte T_a . Die Punkte T_a, T'_a liegen bezüglich des Punktes M symmetrisch. Andere Methode, den Punkt T_a zu bestimmen. Die harmonische Normale ist eine Verallgemeinerung der Winkelnormalen und entsteht, wenn man irgendeine andere Gerade durch M an Stelle der Kurvennormale der Definition der neuen Normalen zugrunde legt. *E. A. Weiss* (Bonn).

Maeda, Jusaku: A remark concerning plane curves. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 28, 334—349 (1940).

Faisant suite à un travail antérieur (ce Zbl. 16, 415) l'A. démontre des propriétés

géométriques concernant la normale affine, les coniques ayant un contact de 3-ème ordre (dont la parabole P et l'hyperbole équilatère H), la cubique cyclique Γ , lieu des foyers de ces coniques, relatifs à un point M d'une courbe (M) , les podaires d'un point fixe de Γ par rapport à (M) . — On déduit des propriétés concernant les caustiques par réflexion ou réfraction à travers (M) d'une source lumineuse ponctuelle.

Al. Pantazi (Bucarest).

Dietze, Heinz: Neue Beiträge zur natürlichen Affingeometrie. Dresden: Diss. 1940. 34 S.

Die Arbeit will zwei Aufgaben lösen: 1. Bestimmung der Kurven, deren zweite Affinevolute ein Punkt ist; 2. Bestimmung der Kurven, deren Affinvariante bei der allgemeinen Affingruppe der Ebene konstant ist mit Hilfe einer Methode von G. Kowalewski. Im ersten Teil bestimmt Verf. statt dessen Kurven, die durch affinvarianten Abwickeln der Parabel von einem Kegelschnitt erzeugt werden — Analogon zur Erzeugung der Kreisevolvente —, was offenbar eine ganz andere Aufgabe ist. Die Lösungen der zweiten Aufgabe sind bekanntlich W -Kurven, die z. B. bei W. Blaschke, Differentialgeometrie 2, 25, angegeben werden. Trotzdem findet Verf. nach umständlicher Rechnung ein falsches Ergebnis. Ein Rechenfehler sei angegeben; bei den Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, auf S. 22 reduziert sich die — auf S. 21 falsch wiedergegebene — Wronskimatrix für $s = 0$ nicht auf die Einheitsmatrix. *Bol* (Freiburg).

Maeda, Jusaku: On the Laguerre-geometry of plane curves. Jap. J. Math. 17, 13—25 (1940).

Verf. untersucht die nach der Bezeichnung von G. Scheffers [Math. Ann. 60 (1905)] äquivalenten Abbildungen der Ebene, die zugleich Laguerresche Abbildungen sind, d. h. die orientierten Kreise erhalten, und die Differentialinvarianten einer Kurve bezüglich derartiger Abbildungen.

E. Bompiani (Roma).

Hsiung, Chuan-Chieh: Sopra il contatto di due curve piane. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 443—451 (1940).

Verf. entwickelt die Konstruktion einiger Geraden, die mit zwei ebenen Kurvenelementen, die in einem Punkte eine Berührung vorgegebener Ordnung eingehen, und einem weiteren veränderlichen Punkte auf ihrer gemeinsamen Tangente projektiv verknüpft sind. Einige notwendige Berichtigungen enthält die nachstehend besprochene Arbeit von Bompiani.

E. Bompiani (Roma).

Bompiani, E.: Sul contatto di due curve piane. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 37—40 (1940).

Verf. zeigt, daß die in der vorstehend besprochenen Arbeit von Chuan-Chieh Hsiung zu zwei sich in einem einfachen Punkt O in k -ter Ordnung berührenden Kurven C, \bar{C} konstruierten Geraden $\gamma_0^{(k)}$ nicht, wie Verf. meint, mit den Kurvenelementen in O projektiv-kovariant verknüpft sind, sondern wesentlich von der Wahl eines bei der Konstruktion benutzten Punktes auf der gemeinsamen Tangente in O abhängen, der nicht invariant festgelegt werden kann. Hingegen deutet Verf. andere Konstruktionsmöglichkeiten projektiv-kovarianter Geraden durch O an. *Harald Geppert*.

Masotti Biggiogero, Giuseppina: Sul rapporto delle curvature in relazione alle trasformazioni puntuali. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 375—381 (1940).

Eine in der Umgebung von O reguläre Punkttransformation T , die O in O' und daselbst die x -Richtung in die x' -Richtung überführt, hat die Gestalt:

$$\begin{aligned} x &= a_{10}x' + a_{01}y' + a_{20}x'^2 + a_{11}x'y' + a_{02}y'^2 + \dots; \\ y &= b_{01}y' + b_{20}x'^2 + b_{11}x'y' + b_{02}y'^2 + \dots, \quad a_{10}b_{01} \neq 0. \end{aligned}$$

Ein Kurvenelement E_λ zweiter Ordnung: $y = \lambda x^2 + \dots$ wird durch T in E'_λ : $y' = \lambda' x'^2 + \dots$ mit $\lambda' = (a_{10}^2 \lambda - b_{20}) b_{01}^{-1}$ übergeführt. Setzt man also $\lambda_0 = b_{20} a_{10}^{-2}$ und betrachtet zwei sich in O berührende Elemente $E_\lambda, E_{\bar{\lambda}}$ mit den Krümmungen $\varrho, \bar{\varrho}$ sowie deren Bilder mit den Krümmungen $\varrho', \bar{\varrho}'$, so gilt:

$$\varrho': \bar{\varrho}' = k(\varrho: \bar{\varrho}); \quad k = (\lambda \bar{\lambda} \lambda_0 0),$$

womit k als Doppelverhältnis geometrisch deutbar ist. — Damit das Krümmungsverhältnis bei T ungeändert bleibt, muß $\lambda_0 = 0$ sein, d. h. dem Element mit $\lambda = 0$ dasjenige mit $\lambda' = 0$ entsprechen, ein Wendepunktelement durch O also in ein solches durch O' übergehen; insbesondere tritt dieser Fall bei projektiven Abbildungen ein, und $\varrho: \varrho$ ist dann die Mehrke-Segre-Invariante. Durch O gehen bei einer allgemeinen T drei Richtungen derart, daß das Krümmungsverhältnis sie berührender Kurvenpaare durch T nicht beeinflußt wird, während es zu beliebiger Richtung durch O keine solchen Elementpaare gibt. Hingegen zeigt die Diskussion des Falles $k = -1$, daß es zu jeder Richtung t durch O unendlichviele verschiedene, t in O berührende Elementpaare gibt, deren Krümmungsverhältnis durch T sein Vorzeichen wechselt; sie lassen sich als Paare einer Involution ermitteln.

Harald Geppert (Berlin).

Popa, Ilie I.: Sur les réseaux plans. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **23**, 31—33 (1940).

Es sei ein ebenes Kurvennetz vorgelegt, t_1, t_2 bezeichnen die Tangenten an die durch den Punkt x gehenden Netzkurven, t'_1, t'_2 die entsprechenden Geraden für den Punkt $x' = x + dx$. Betrachtet werden die Schnittpunkte $c_1 = (t_1, t'_1)$, $c_2 = (t_2, t'_2)$. Verf. untersucht die Korrespondenz, die der Geraden (xx') die Gerade (c_1c_2) zuordnet. Beschreibt die erste Gerade ein Büschel mit dem Zentrum x , so hüllt die zweite einen Kegelschnitt ein. Die Korrespondenz zwischen den beiden Formen ist eineindeutig und hängt von der Umgebung 2. Ordnung des Punktes x ab.

Piero Buzano.

Sypták, M.: Über die logarithmischen Spiralen in p -dimensionalen euklidischen Räumen. Čas. mat. fys. **70**, 34—37 u. deutsch. Zusammenfassung 37 (1940) [Tschechisch].

Verf. führt (ohne Beweis) einige interessante Eigenschaften der Kurven an, deren sämtliche Krümmungen dem Bogen indirekt proportional sind.

Hlavatý (Prag).

Tonolo, Angelo: Sui polinomi di Frenet. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **98**, 155—190 (1939).

Auf einer ebenen Kurve C seien P_0, P die zu den Bogenlängen 0 bzw. s gehörigen Punkte; $t, n(t_0, n_0)$ bezeichnen die Einheitsvektoren in Tangenten- und Normalenrichtung in P bzw. P_0 . Entwickelt man $t(s), n(s)$ nach Potenzen von s in Taylorreihe und bricht mit den Gliedern k -ter Ordnung ab, so erhält man unter ständiger Benutzung der Frenetschen Formeln $t(s) \sim A_k(s)t_0 + B_k(s)n_0$ [und analog für $n(s)$], wobei $A_k(s), B_k(s)$ Polynome k -ten Grades in s sind, deren Koeffizienten ganz rational von der Krümmung und ihren Ableitungen bis zur $k-1$ -ten Ordnung nach s in P_0 abhängen. Verf. nennt sie die Frenetschen Polynome. Sie lassen sich in der Form $A_{k+1}(s) = A_k(s) + a_{k+1}s^{k+1}$; $B_{k+1}(s) = B_k(s) + b_{k+1}s^{k+1}$ schrittweise berechnen. Für die Vorzeichen a_{k+1}, b_{k+1} leitet Verf. unmittelbare $2k-2$ -reihige Determinantenausdrücke her; ihre Benutzung kann man durch Rücklaufformeln umgehen, die $a_k, \dot{a}_k, \ddot{a}_k, a_{k+1}, \dot{a}_{k+1}$ mit a_{k+2} (und entsprechend bei den b_k) linear verknüpfen.

Harald Geppert (Berlin).

Vassell, Annette: A complete characterization of sectional families of curves. Amer. J. Math. **62**, 813—822 (1940).

Projiziert man das dreidimensionale System der ebenen Schnitte einer Fläche des S_3 auf eine Ebene, so erhält man eine dreidimensionale Kurvenfamilie; durch eine projektive Abbildung kann man sie in die einer Orthogonalprojektion entsprechende Familie überführen und erhält für diese eine Gleichung der Form $ax + by + c - f(x, y) = 0$. Nach dreimaliger Ableitung und Elimination der Konstanten a, b, c gelangt man zu einer Differentialgleichung dritter Ordnung für dieses Kurvensystem. Verf. zeigt, daß deren Integralkurven in der metrischen Geometrie durch sechs geometrische Eigenschaften, die etwas versteckt liegen, gekennzeichnet sind. Im Falle der ebenen Schnitte einer Regelfläche tritt hierzu eine siebente kennzeichnende Eigenschaft.

Douglas, Jesse: A new special form of the linear element of a surface. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 101—116 (1940).

Auf einer Fläche F werden ∞^2 Linien L mit folgenden beiden Eigenschaften be-

trachtet: 1. die Linien L können durch eine geeignete eindeutige Abbildung der Fläche F auf einer Ebene in die Geraden dieser Ebene verwandelt werden; 2. drei Linien L bilden ein Dreieck ABC , dessen Winkelsumme $A + B + C$ und dessen Inhalt S ständig die Gleichung $A + B + C - \pi = kS$ befriedigen, wobei k eine gegebene Konstante bedeutet. Ist $k = 0$, so gibt es Systeme L auf einer beliebigen Fläche F ; in der Tat besitzen die Eigenschaft 2. (für $k = 0$) die Linien L , die in einer konformen ebenen Abbildung von F den Geraden der Ebene entsprechen. Ist $k \neq 0$, so muß F eine besondere Fläche sein; man wähle auf F Minimalkoordinaten u, v , so daß $ds^2 = 2F du dv$; die Eigenschaft 2. und der Integralsatz von Gauß und Bonnet über die geodätische Krümmung der Linien L zeigen dann, daß diese Linien durch eine Differentialgleichung $v'' = Bv' + Cv'^2$ dargestellt werden können, wo $\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial v} = 2kF$; wenn jetzt die Eigenschaft 1. noch berücksichtigt wird, so kann man für B, C folgende Ausdrücke finden:

$$B = \frac{\partial}{\partial u} (\log I - 2 \log II), \quad C = \frac{\partial}{\partial v} (2 \log I - \log II),$$

wo I, II durch zwei beliebige Funktionen $U_1(u), U_2(u)$ von u allein und zwei beliebige Funktionen $V_1(v), V_2(v)$ von v allein folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$I = \begin{vmatrix} U_1 + V_1 & U'_1 \\ U_2 + V_2 & U'_2 \end{vmatrix}, \quad II = \begin{vmatrix} U_1 + V_1 & V'_1 \\ U_2 + V_2 & V'_2 \end{vmatrix};$$

es folgt noch:

$$2kF = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\log I + \log II).$$

Für beliebige krummlinige Koordinaten auf F sind die Formeln selbstverständlich viel komplizierter und können hier nicht angegeben werden. Es folgt eine geometrische Konstruktion der Linien L .

E. G. Togliatti (Genova).

Becqué, J.: Sur l'emploi du vectoriel dans la théorie du trièdre mobile de Darboux. Enseignement Math. 38, 117—131 (1940).

L'auteur combine l'emploi des homographies vectorielles avec les notations algébriques du calcul tensoriel pour traiter quelques problèmes classiques de la théorie des surfaces (tangentes conjuguées, lignes de courbures, torsion géodésique, représentation sphérique etc.).

Hlavatý (Prag).

Dwinger, Ph.: Über ein System von drei Strahlenkongruenzen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 1023—1031 (1940).

Jedem Strahl A eines Strahlensystems (A) werden zwei Normalen B und G zugeordnet, die im Mittelpunkt auf den Hauptflächen von (A) senkrecht stehen und die Systeme (B) und (G) erzeugen. Verf. untersucht den Fall, daß irgend zwei der drei Systeme die Normalensysteme des dritten sind. Zwischen den sechs Hauptdrallen der drei Systeme, die gemeinsame Mittelfläche haben, besteht eine einfache Beziehung, die Hauptdralle von A sind k^1 und k^2 , die von B sind k^3 und k^1 , und die von G sind k^2 und k^3 .

W. Haack (Karlsruhe).

Schapiro, J. L.: Sur une propriété caractéristique de la métrique des surfaces de rotation. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 23—24 (1940).

Soit donnée une surface ayant un réseau (au moins) des chemins égaux (Netz ohne Umwege) géodésiques: L'auteur démontre que la surface en question est une surface de rotation [à une déformation près] (hypothèse de I. S. Doubnoff): En désignant par λ_n^i ($n=1, 2$) les verseurs tangents du réseau, par 2ω leur angle et par μ_i le vecteur satisfaisant l'équation $\lambda_1^i \mu_i = -\lambda_2^i \mu_i = 1$, on trouve tout d'abord l'équation de Killing $\mu_{i,j} + \mu_{j,i} = 0$ (ce qui signifie que la surface en question admet le groupe de mouvements) et ensuite $\omega = \text{const}$ le long des trajectoires du vecteur μ_i , d'où résulte la construction évidente du réseau des chemins égaux géodésiques.

Hlavatý.

Blaschke, Wilhelm: Ein Satz von Herglotz zur Geometrie Riemanns. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 19, 251—256 (1940).

Eine Fläche X_2 in R_3 wird eben genannt, wenn jede geodätische Linie, welche die X_2 tangiert, ganz in der X_2 enthalten ist. Es wird der Satz von Herglotz ohne Rechnung bewiesen. Liegen irgend zwei Geodätische durch einen festen Punkt P stets in einer ebenen X_2 , dann gestattet die R_3 die dreigliedrige Gruppe der Drehungen um P . Es zeigt sich, daß eine X_2 dann und nur dann eben ist, wenn die Normalvektoren der X_2 untereinander parallel laufen. Diese Sätze werden für X_{n-1} in einer R_n ergänzt. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Su, Buchin: Sopra certi fasci di quadriche e sul fascio canonico. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 2, 438—443 (1940).

Bekanntlich bestimmt jedes Wendepunktelement 4. Ordnung E_4 einer ebenen Kurve auf der Wendetangente einen invarianten Punkt (Bompiani, *Boll. Un. Mat. ital.* 1926); durch jede Haupttangente in einem Punkte O einer Fläche werden nun Ebenen gelegt und deren Schnitte mit der Fläche und der Tangentenfläche der zugehörigen Asymptotenlinie sowie die beiden invarianten Punkte, die auf der gemeinsamen Tangente bestimmt werden, untersucht; auf der letzten erhält man also drei wohlbestimmte Punkte, nämlich O und die beiden genannten Punkte, zu jeder durch sie gelegten Ebene, und damit ergibt sich die Möglichkeit der Definition von Doppelverhältnissen. — Nach Vorgabe einer Zahl K kann man zu jedem Ebenenpaar π_1, π_2 , das durch die beiden Haupttangente in O geht, die Schnittgerade $l_1 = (\pi_1, \pi_2)$ und eine weitere Gerade l_2 , die die Haupttangente in den beiden Punkten schneidet, die mit den schon genannten drei Punkten das Doppelverhältnis K haben, bestimmen. — Diese Geraden sind Polaren bezüglich eines Büschels von Flächen 2. Ordnung Q_K , das Verf. ausgehend von den linearen Schmiegungskomplexen der Asymptotenlinien in O konstruiert. *E. Bompiani* (Roma).

Ermolaev, L.: Quelques classes de correspondances ponctuelles de surfaces, déterminées par les images projectives. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 27, 422—424 (1940).

Verf. führt die Untersuchung einer schon früher betrachteten Korrespondenz zwischen den beiden Flächen S und Σ und der von ihm eingeführten Projektivitäten P und T weiter (dies. Zbl. 23, 70). Er untersucht die Projektivitäten, die man dadurch erhält, daß man einander die Tangente zuordnet, die P und T 1. einer Tangente von S , 2. zwei konjugierten Tangente entsprechen lassen, und weitere spezielle damit zusammenhängende Fragen. *E. Bompiani* (Roma).

Weitzenböck, R.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4 . 4. Mitt. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 43, 797—804 (1940).

Weitzenböck, R.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Regelflächen im R_4 . 5. Mitt. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 43, 805—814 (1940).

Es wird in Fortsetzung früherer Untersuchungen [*Akad. Wetensch. Amsterdam Proc.* 43, 440—448, 548—556, 668—673 (1940); dies. Zbl. 23, 165, 270] gezeigt, wie man neben der bereits bekannten Invariante Q zwei weitere einfachste Invarianten A und B der Gewichte $\varrho = 20$, $\sigma = 10$ finden kann. Für deren Linearkombination $U = -36A + 24B$ ergibt sich eine geometrische Deutung. — Man kann für die Erzeugenden der Fläche mittels der bereits definierten invarianten Punkte H (Heftpunkt) und F eine invariante Darstellung finden. Gleiches ist möglich unter Verwendung des Punktes M , in dem sich je vier konsekutive Tangentialräume der Regelfläche schneiden, und seiner Ableitungen nach dem in die Darstellung der Fläche eingehenden Parameter. Dieser Darstellung kann man durch Ersetzung der gewöhnlichen Ableitungen durch kovariante auch invariante Gestalt geben. Dadurch gelangt man im allgemeinen Falle, wo $Q \neq 0$, $U \neq 0$ ist, zu einem wesentlichen Systeme von sieben Differentialinvarianten (von denen durch invariante Normierung noch zwei unterdrückbar sind), welche als Funktionen des Parameters t die Regelfläche bis auf projektive Transformationen des R_4 bestimmen. *Strubecker* (Wien).

Su, Buchin: On the projective differential geometry of a non-holonomic surface in ordinary space. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 289—313 (1940).

Untersuchungen über Elemente 3., 4. und 5. Ordnung einer im allgemeinen anholonomen Fläche V_3^2 im projektiven S_3 . Den Schwerpunkt bildet die Auffindung einer für jeden Punkt P der V_3^2 definierten und von einem Parameter k abhängenden Klasse projektiver Korrespondenzen C_k zwischen den durch P hindurchgehenden und den in der Tangentialebene der V_3^2 in P liegenden Geraden. Den Ausgangspunkt zur Definition der C_k bilden die Schnittkurven der durch die Haupttangente in P hindurchgehenden Ebenen mit den zwei abwickelbaren Flächen längs der Asymptotischenlinien der V_3^2 in P einerseits und mit der V_3^2 andererseits. Im anholonomen Falle ist nur die C_1 eine Polarität, und zwar dann in bezug auf ein Büschel von Quadriken. Diese entsprechen den von E. Bompiani und E. P. Lane im holonomen Falle betrachteten Hauptquadriken und bilden in den Untersuchungen des Verf. einen der wichtigsten Begriffe. Schließlich werden die Begriffe der Moutardschen Quadriken und der Segreschen Korrespondenz auf den anholonomen Fall erweitert. O. Borůvka.

Bortolotti, Enea: Sulla geometria proiettiva differenziale di una superficie anolonomo nello spazio ordinario. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 315—325 (1940).

Vergleichende Bemerkungen und Ergänzungen zu der Theorie einer anholonomen Fläche V_3^2 im projektiven S_3 und insbesondere zu dem Begriffe der Moutardschen Quadriken mit besonderer Rücksicht auf die vorangehende Arbeit von B. Su.

O. Borůvka (Brünn).

Creanga, Joan: Sulla trasformazione degli intornoi del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 1, 177—227 (1940)

Une correspondance générique C , entre deux espaces euclidiens S_3, \bar{S}_3 à trois dimensions, ayant été choisi pour trièdre de référence des deux espaces les trièdres principaux en deux points correspondants O, \bar{O} (c'est à dire les trièdres orthogonaux correspondants ayant les sommets en O, \bar{O}) est représentée dans le voisinage du 2^{ème} ordre des points O, \bar{O} par les équations

$$\bar{x} = ax + \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy) + \dots,$$

$$\bar{y} = by + \frac{1}{2}(b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy) + \dots,$$

$$\bar{z} = cz + \frac{1}{2}(c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{23}yz + 2c_{31}zx + 2c_{12}xy) + \dots$$

Les coefficients a, b, c sont les invariants (métriques) du 1^{er} ordre de C en O, \bar{O} (modules de dilatation linéaire). L'A. donne des interprétations géométriques pour tous les coefficients a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} (invariants métriques de 2^{ème} ordre de C en O, \bar{O}). Plus précisément: d'abord l'A. étudie des éléments curvilignes du 2^{ème} ordre correspondants en C et détermine les sept directions caractéristiques en O (aux courbes de S_3 qui aient des inflexions dans ces directions correspondent des courbes en \bar{S}_3 qui ont des inflexions en \bar{O}). En considérant les courbures en O des courbes qui ont, pour trièdres de Frenet, le trièdre principal en O , et dont les courbes correspondantes ont, pour trièdre de Frenet, le trièdre principal en \bar{O} , il donne une interprétation géométrique aux invariants $a_{22}, a_{33}, b_{11}, b_{33}, c_{11}, c_{22}$. Après cela il étudie la transformation des éléments superficiels du 2^{ème} ordre (calottes) et, en particulier, la transformation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure. En considérant les courbures gaussiennes des calottes par O — qui aient pour plan tangent un des plans principaux, pour directions des asymptotiques en O les directions principales, et dont les correspondantes calottes aient, pour plan tangent en \bar{O} , un des plans principaux, pour directions de courbure les directions principales — l'A. donne une interprétation géométrique aux invariants a_{23}, b_{31}, c_{12} . En introduisant l'axe de la correspondance (déjà considérée par Bompiani) pour des calottes correspondantes, il trouve des nouvelles interprétations des invariants. Ayant considéré la variation des trièdres principaux en deux

points correspondants M , M placés dans le voisinage de 1^{er} ordre de O, \bar{O} , l'A. interprète les invariants $a_{11}, a_{12}, a_{31}, b_{12}, b_{22}, b_{23}, c_{31}, c_{23}, c_{33}$ (dérivées de a, b, c dans les directions principales). Enfin, l'A. donne des applications. *Mario Villa* (Bologna).

Dubnov, J., et S. Fuchs: Sur quelques réseaux de l'espace analogues au réseau de Tchebychev. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 102—105 (1940).

Les A. définissent la notion de réseau de Tchebychev dans un espace à 3 dimensions et à connexion affine. Un réseau est la configuration formée par 3 familles à ∞^2 courbes et il est holonome lorsqu'il est formé par les intersections de 3 familles de surfaces. Il est dit: 1° fortement parallèle lorsque les directions des courbes d'une famille passant par les points d'une courbe d'une autre famille sont parallèles; 2° faiblement parallèle lorsque les éléments plans formées par les directions des courbes de deux familles passant par les points d'une courbe de la troisième famille sont parallèles; 3° métriquement tchebychevien dans un espace de Riemann lorsqu'il est holonome et les segments des courbes d'une famille compris entre les surfaces contenant les courbes des deux autres familles, sont égaux. — Par l'extension d'une méthode employée dans l'espace à 2 dimensions (ce Zbl. 17, 187, 228) les A. écrivent les conditions pour qu'un réseau appartienne à l'une de ces catégories et établissent des propriétés montrant surtout le degré d'interdépendance entre ces catégories.

Al. Pantazi (Bukarest).

Lense, Josef: Über die Ableitungsgleichungen einer Mannigfaltigkeit im mehrdimensionalen komplexen euklidischen Raum. Math. Z. 47, 78—84 (1940).

L'A. considera una varietà V_m in uno spazio S_n euclideo complesso e si propone di determinare la varietà rispetto al gruppo dei movimenti anche quando essa sia isotropa di rango K (cioè quando K sia il rango del determinante dei coefficienti del ds^2). — Allo scopo egli mostra che si possono associare (qualunque sia K) ad ogni punto di V_m m vettori tangenziali, di cui $m - K$ isotropi, ed $n - 2m + K$ vettori normali tutti fra loro indipendenti: con questi $n - m + K$ vettori ed altri $m - K$ pure indipendenti fra loro e dai precedenti si ha un riferimento locale. — Le equazioni di derivazione per questo e le loro condizioni d'integrabilità (che sono l'analogo delle equazioni di Gauss e di Mainardi-Codazzi) determinano V_m a meno di movimenti e di simmetrie.

E. Bompiani (Roma).

Hopf, Eberhard: Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 91, 261—304 (1939).

Im ersten Kapitel werden n -dimensionale Mannigfaltigkeiten M konstanter negativer Krümmung betrachtet, und zwar diejenigen, die folgendermaßen erzeugt werden können: Man versieht das Innere $x_i x_i < 1$ der n -dimensionalen Einheitskugel mit der hyperbolischen Bogenmetrik $ds^2 = \frac{4dx_i dx_i}{(1 - x_i x_i)^2}$ und identifiziert dann diejenigen Punkte, die unter einer gewissen eigentlich diskontinuierlichen Gruppe G von hyperbolischen Bewegungen kongruent sind. (Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung läßt sich bekanntlich unter weiten Voraussetzungen stets auf diese Weise erzeugen.) Die orientierten Geodätischen auf M definieren eine maßtreue Strömung T_i im Raume Ω der orientierten Linienelemente von M . Verf. nennt M von der ersten Klasse, wenn die von einem Punkte p_0 von M ausgehenden, auf M ins Unendliche laufenden geodätischen Halbstrahlen einer Nullmenge von Anfangsrichtungen entsprechen (diese Eigenschaft ist von der Wahl von p_0 unabhängig). Sonst soll M zur zweiten Klasse gehören. In Zusammenhang mit der klassischen Einteilung der Gruppen G in solche erster und zweiter Art kann folgendes behauptet werden: ist G von der zweiten Art, so ist M von der zweiten Klasse; ist G von der ersten Art und besitzt eine endliche Basis, so ist M von der ersten Klasse; ist G von der ersten Art, aber ohne endliche Basis, so kann M sowohl in die erste als auch in die zweite Klasse gehören. — Es werden nun die folgenden Sätze bewiesen: Ist M von der zweiten Klasse, so laufen fast alle von einem beliebigen Punkte von M

ausgehenden geodätischen Halbstrahlen ins Unendliche (Dissipativität der geodätischen Strömung). Ist M von der ersten Klasse, so ist die geodätische Strömung ergodisch (selbst wenn M kein endliches Totalvolumen hat). Ist M von endlichem Totalvolumen, so ist T , sogar vom Mischungstyp. Diese Ergebnisse waren (außer dem Falle: M von der ersten Klasse, aber mit unendlichem Totalvolumen) für zwei Dimensionen schon früher vom Verf. und von G. A. Hedlund erhalten (vgl. Hopf, Ergodentheorie, dies. Zbl. 17, 283, sowie Hopf, dies. Zbl. 21, 237 und Hedlund, dies. Zbl. 20, 403), die jetzt erbrachten Beweise sind aber viel einfacher. Zum Beweis des Mischungscharakters wird im Falle $n = 2$ Hedlunds geometrische Methode der Horozykel vereinfacht wiedergegeben. Dieselbe Methode läßt sich auch auf höhere Dimensionen ausdehnen, wobei als wesentliches Hilfsmittel neben dem Raume Ω auch der Raum der orthogonalen Zweibeine auf M herangezogen werden muß. — Im zweiten Kapitel werden vollständige zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten F betrachtet, deren Krümmung K zwischen festen negativen Grenzen variiert und für welche die Richtungsableitung dK/ds beschränkt ist. Diese Flächen F werden auf analoge Weise in zwei Klassen eingeteilt. Ist F von der ersten Klasse, so ist die geodätische Strömung auf F ergodisch. Ist aber F von der zweiten Klasse, so ist die Strömung dissipativ. Die Beweise werden auf eine eingehende Analyse der asymptotischen Geodätischen gegründet. — In einer seitdem erschienenen Arbeit (vgl. dies. Zbl. 23, 268) gelang es dem Verf., diese Resultate auf noch allgemeinere Typen von Flächen auszudehnen. Béla v. Sz. Nagy.

Coburn, N.: Generalized Einstein hypersurfaces of spaces of constant curvature. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 19, 140—152 (1940).

If the principal directions of the second fundamental tensor $h_{\lambda\mu}$ of a V_m in S_{m+1} exist, then the Gauss relation shows that these directions coincide with the principal directions of the Ricci tensor $K'_{\lambda\mu}$ of V_m . The author is especially concerned with a particular case, where there are only two distinct k'_c in the equation $h_{\lambda\mu} i_c^{\lambda} = h_c i_c^{\mu}$ (generalization of Einstein space). The existence of these V_m is proved and their properties are discussed. Hlavatý (Prag).

Yano, Kentaro: Concircular geometry. 1. Concircular transformations. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 195—200 (1940).

A curve, whose curvatures k_i satisfy the equations $k_i = \delta_i^1 \text{ const.}$ ($i = 1, \dots, n-1$) is termed a geodesic circle. A conformal transformation $*g_{\lambda\mu} = r^2 g_{\lambda\mu}$ which carries every geodesic circle in a geodesic circle is called a concircular conformal transformation. For such a transformation it is necessary that $r_{\mu;\nu} - r_{\nu;\mu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Delta_1(\log r)$ be proportional to $g_{\mu\nu}$ ($r_{\nu} = (\log r)_{,\nu}$). Starting with the conformal transformation of the curvature tensor one finds by the usual method of elimination a concircularly invariant tensor $Z'_{\omega\mu\lambda}$ (analogous to the Weyl conformal tensor) whose vanishing is a necessary and sufficient condition that the corresponding Riemannian space may be reduced to an Euclidean space by a suitable concircular transformation. (It is interesting that this result holds also for $n = 3$. Ref.) Hlavatý (Prag).

Yano, Kentaro: Sur la connexion de Weyl-Hlavatý et ses applications à la géométrie conforme. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 595—621 (1940).

Pour trouver des invariants conformes de la métrique $r^2 g_{\lambda\mu}$, l'auteur se sert d'une connexion de M. Weyl (1) $g_{\mu\lambda;\nu} = -2 g_{\mu\lambda} p_{\nu}$, où le vecteur p_{ν} subit [à côté de la transformation induite par la transformation conforme de la métrique $*p_{\nu} = p_{\nu} - (\log r)_{,\nu}$] une transformation (2) $'p_{\nu} = p_{\nu} + W_{\nu}$ (W_{ν} arbitraire). Les invariants conformes sont donc des invariants de cette connexion indépendants de la transformation (2) [cfr. V. Hlavatý, Bull. intern. Acad. Sci. de Bohême 37, 181—184 (1936)]. En partant du tenseur de courbure de la connexion, l'auteur obtient par l'élimination de W_{λ} le tenseur de M. Weyl. — Une courbe $x^{\nu}(s)$ étant donnée, où $G_{\lambda\mu} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{dx^{\mu}}{ds} = 1$ ($G_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} (\text{Dét } |g_{\alpha\beta}|)^{-1/n}$) on parvient par un procédé ingénieux d'élimination aux

formules de Frenet, où figurent les courbures $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ et les densités vectorielles J_1^v, \dots, J_n^v , mutuellement orthogonales ($J = dx/ds$), invariantes par rapport aux transformations conformes. À la fin l'auteur construit un paramètre scalaire conforme (paramètre projectif) d'une courbe moyennant la dérivée schwarziennne et parvient ainsi à l'équation covariante des circonférences généralisées. *Hlavatý (Prag).*

Mutô, Yosio: On some properties of subspaces in a conformally connected manifold. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 621—636 (1940).

The author starts with the conformal connection given with respect to a natural frame (repère naturel) (A_0, A_1, A_∞) in a conformally connected manifold C_n ($i=1, 2, \dots, n$). An m -dimensional manifold C_m being given, its frame $(A_0, A_\alpha, A_x, A_\infty)$ ($\alpha=1, \dots, m, x=m+1, \dots, n$) may be constructed in such a way that the intersection $A_{(m)}$ of the hyperspheres A_x is defined completely. The conformal correspondence between $A_{(m)}$ and $A_{(m)} + dA_{(m)}$ leads to the conformal connection induced in C_m . The connection in C_n and the induced connection on C_m are related by the Gauss and Mainardi-Codazzi equations. Using this results the author discusses some more or less special curves on C_m in C_n (the relation between the projective parameter τ of a curve on C_m and the projective parameter t of the same curve in C_n [which is a linear fractional one if C is totally umbilical], some properties of special autoconcurrent curves and so on). *Hlavatý (Prag).*

Sasaki, Shigeo: Geometry of the conformal connexion. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 29, 219—267 (1940).

In the first Chapter the author introduces the Cartan normal conformal connection \mathfrak{C}_n and gets (by a treatment analogous to that of a Riemannian space) the necessary and sufficient conditions for a conformal space (with a normal conformal connection) admitting an infinitesimal conformal transformation, which are the (generalized) Killing equations. The conditions of integrability of this system give also the number of its solutions, i. e. the degree of freedom of the space with regard to the infinitesimal conformal transformations. In the second and third Chapter the author exposes in details the results about \mathfrak{C}_m in \mathfrak{C}_n ($n > m \geq 1$) published previously (this Zbl. 20, 260; 23, 75), using also the results found by Yano and Mutô (this Zbl. 21, 427); Yano-Mutô (this Zbl. 21, 427) and Mutô: (see the prec. review). The last Chapter is devoted to the case $m = n - 1$. Here the fundamental quantities consist essentially of the relative affine tensors $G_{ab} \equiv G_{ba}$ and $b_{ab} = b_{ba}$ (which correspond to first and second principal tensor in a Riemannian geometry). These tensors lead to lines of curvature, umbilical points, conformal normal curvatures, asymptotic curves and so on. *Hlavatý (Prag).*

Michal, Aristotle D., et Aladuke Boyd Mewborn: Géométrie différentielle projective générale des géodésiques généralisées. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 392—394 (1939).

Skizze einer Theorie, deren Ziel es ist, in den Hausdorff-Banachschen Räumen den projektiven Zusammenhang einzuführen. Es werden zwei geometrische Objekte zugrunde gelegt, welche die geodätischen Linien (von den Verf. géodésiques généralisées genannt) zu definieren gestatten. Es wird nachher nach dem Muster von Berwald [Ann. of Math. 37, 879—898 (1936); dies. Zbl. 15, 176] mit Hilfe der Schwartzschen Ableitung der normale projektive Parameter auf den geodätischen Linien eingeführt. Von den drei ohne Beweis zitierten Sätzen geben der erste eine Eigenschaft des projektiven Parameters, die zwei weiteren die Eigenschaften des projektiven Zusammenhanges an. Die Arbeit setzt die Kenntnis folgender früherer Arbeiten des Verf. voraus: A. D. Michal, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 546—548 (1937); dies. Zbl. 17, 361 und A. D. Michal-D. H. Hyers, Ann. d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa 7, 157—176 (1938); dies. Zbl. 18, 367. *Golqb (Krakau).*

Klose, A.: Maßfunktionen in der Vektorrechnung. Deutsche Math. 5, 322—328 (1940).

In einem euklidischen E_3 wird eine neue Rechnungsmethode für Vektoren entwickelt. Sie beruht auf der Einführung der sog. Maßfunktionen, das ist linearen und homogenen Funktionen der Vektoren. Mit Hilfe der Operation der „Mittelung“

$$M[\Phi(e)] = \frac{3}{4\pi} \int \Phi(e) d\omega(e),$$

wo Φ eine integrierbare Funktion der Richtungsveränderlichen e und $d\omega$ das ungerichtete Flächenelement ist und das Integral über die Fläche der Einheitskugel zu erstrecken ist, gelangt man zu einer (in invarianter Weise definierten) Größe derselben Art wie Φ . Jede skalare Maßfunktion $w(e)$ definiert so einen bestimmten Vektor v ($v = M[ew(e)]$). Die M -Rechnung läßt sich auf Tensoren höherer Stufe übertragen. Bei Tensoren zweiter Stufe tritt als Integrand eine (von Gibbs eingeführte) Dyade auf. An einigen Beispielen wird gezeigt, wie die bekannten Invarianten bzw. Kovarianten eines Tensors mit Hilfe der M -Rechnung gebildet werden. *St. Golab.*

Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Über die Krümmung ebener Bogen endlicher Ordnung. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 71, 219—227 (1940).

Ein ebener Bogen heißt von der linearen Ordnung n , wenn er von jeder Geraden in höchstens n Punkten getroffen wird. Die ebenen Bögen höchstens dritter linearer Ordnung sind bekanntlich stückweise konvex und besitzen daher fast überall eine endliche Krümmung. Verf. konstruiert einen ebenen Bogen vierter linearer Ordnung, der überall eine stetige Tangente, aber in einer Menge M von positivem Längenmaß keine Krümmung hat. Die Konstruktion ist so beschaffen, daß sich die Menge M von dem ganzen Bogen nur um eine Menge von beliebig klein wählbarem Längenmaß unterscheidet. *G. Alexits (Budapest).*

Dinghas, Alexander: Zur isoperimetrischen Ungleichung für ebene konvexe Kurven. Rev. math. Union Interbalkan 3, H. 3/4, 7 S. (1940).

Zunächst beweist Verf. elementar eine Verschärfung des Wirtingerschen Lemmas. Für jede in $(0, \pi)$ totalstetige Funktion y mit L -integrierbarem y'^2 (Klasse A), die $y(0) = y(\pi) = 0$ erfüllt, gilt die durch Teilintegration zu beweisende Identität

$$\int_0^\pi (y'^2 - y^2) dx = \int_0^\pi (y' - y \cotang x)^2 dx;$$

ist überdies auch y' totalstetig, y''^2 L -integrierbar (Klasse B) und $y'(0) = y'(\pi) = 0$, so ist weiter:

$$\int_0^\pi (y''^2 - 5y'^2 + 4y^2) dx = \int_0^\pi (y'' - 3y' \cotang x + y(1 + 3 \cotang^2 x))^2 dx.$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt hieraus für jede mit der Periode 2π periodische Funktion y der Klasse B, die $\int_0^{2\pi} y dx = 0$ erfüllt, die gewünschte Verschärfung:

$$0 \leq \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx \leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (y''^2 - y'^2) dx,$$

in der links bzw. rechts die Gleichheit nur für $y = c_1 \cos x + d_1 \sin x$ bzw. $y = c_1 \cos x + d_1 \sin x + c_2 \cos 2x + d_2 \sin 2x$ steht. — Sind L, F Umfang und Inhalt einer Eilinie C , die in einer Richtung die Breite $2d$ hat, mit der Stützfunktion $p(\varphi)$, so schließt man aus Vorangehendem durch den Ansatz $y = p - d$ bzw. $p - \frac{1}{2\pi} L$ die Ungleichungen

$$4\pi J_0^2 \leq Ld - \pi d^2 - F \leq \frac{1}{4} E - \frac{2\pi}{3} J_1^2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \frac{L^2}{4\pi} - F \leq \frac{1}{4} E,$$

in denen E den absoluten Inhalt der Evoluten von C , J_0 , J_1 angebbare positive Integrale bezeichnen, die geometrisch deutbar sind. Damit ist insbesondere ein elementarerer Zugang zur Hurwitzschen Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung eröffnet.

Harald Geppert (Berlin).

Santaló, L. A.: Ein Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises. Publ. Inst. Mat., Rosario 2, 37—46 (1940) [Spanisch].

Bedeutet ω den Winkel, unter dem man vom Punkt ξ , η aus eine Eilinie K sieht, L ihren Umfang, F die umschlossene Fläche, so gilt nach Crofton (vgl. etwa Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie I (1936) S. 16, dies. Zbl. 14, 325)

$$\int (\omega - \sin \omega) d\xi d\eta = \frac{1}{2} L^2 - \pi F.$$

Dabei ist die Integration über das Äußere der Linie K zu erstrecken. Bedeutet anderseits K_1 eine zweite Eilinie derselben Ebene, die starr beweglich ist und deren Lagen durch die Koordinaten eines Punktes x , y und eine in K_1 feste Richtung α festgelegt sind, dann ist bekanntlich

$$\int dx dy d\alpha = 4\pi F + L^2,$$

wenn das Integral über alle Lagen von K_1 erstreckt wird, so daß K , K_1 innere Punkte gemein haben (vgl. Blaschke a. a. O. S. 31). Aus diesen beiden Formeln leitet der Verf. einen neuen einfachen Beweis für die isoperimetrische Ungleichheit

$$L^2 - 4\pi F \geq 0$$

für Eilinen her.

Blaschke (Hamburg).

Chern, Shiing-Shen, e Chih-Ta Yien: Sulla formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 2, 434—437 (1940).

Im Euklidischen E_3 gilt für 2 Gebiete R_0 , R_1 folgende „kinematische Hauptformel“ der Integralgeometrie

$$\int K(R_0 \cdot R_1) \dot{R}_1 = 8\pi^2 \{V_0 K_1 + A_0 M_1 + M_0 A_1 + K_0 V_1\}$$

nach Santaló und Blaschke (vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie II, S. 99; dies. Zbl. 16, 277). Hier wird die entsprechende Formel für den E_n hergeleitet:

$$\int K(R_0 R_1) \dot{R}_1 = J_n \left\{ K_0 V_1 + V_0 K_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+1} M_k^0 M_{n-2-k}^1 \right\}.$$

Darin bedeutet zum Beispiel \dot{R}_1 die „kinematische Dichte“ von R_1 nach Poincaré und M_k^0 das Integral der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen auf der Berandung des Gebietes R_0 . Der Beweis gründet sich auf einen Gedanken von Blaschke (Integralgeometrie 17, „Deltion“ Athen 1936, 3—14; dies. Zbl. 15, 121).

Blaschke (Hamburg).

Fejes, L.: Über einen extremalen Polyeder. Mat. természett. Értes. 59, 476—478 u. dtsh. Zusammenfassung 479 (1940) [Ungarisch].

In eine vorgegebene Eifläche F sei bei gegebener Eckenzahl ein konvexes Polyeder \mathfrak{P} größter Oberfläche einbeschrieben. O bedeute eine Ecke von \mathfrak{P} , $O_1 \dots O_m$ die dazu benachbarten aufeinanderfolgenden Ecken; in den Ebenen $OO_i O_{i+1}$ ($i=1 \dots m$; $O_{m+1} \equiv O_1$) werden von O aus senkrecht zu $O_i O_{i+1}$ die Vektoren v_i der Länge $\bar{O}_i \bar{O}_{i+1}$ gezeichnet.

Dann fällt der Vektor $\sum_{i=1}^m v_i$ in die Richtung der Flächennormalen von F in O . Dies wird bewiesen.

Harald Geppert (Berlin).

Topologie:

Aleksandrov, P. S.: General combinatorial topology. Matematika. Učenyje Zapiski Moskov gosud. Univ. 45, 3—60 (1940) [Russisch].

Die Arbeit erscheint in englischer Übersetzung in den Ann. of Math. (2) 42.

Harald Geppert (Berlin).

Wecken, Franz: Fixpunktklassen. 1. Math. Ann. 117, 659—671 (1941).

Bei stetiger Deformation einer Abbildung eines endlichen Polyeders auf sich

ändert sich auch die Lage der Fixpunkte, jedoch ist ihre Anzahl — sofern sie endlich ist, was durch Deformation stets erreicht werden kann — nach Lefschetz-Hopf invariant, wenn die einzelnen Fixpunkte mit der richtigen Vielfachheit, dem Fixpunktindex, berücksichtigt werden. Diese Fixpunktzahl s kann nach der Lefschetz-Hopf'schen Spurenformel kombinatorisch berechnet werden. Über die Anzahl der wirklich auftretenden, voneinander verschiedenen Fixpunkte und über ihre Minimalzahl m innerhalb der Abbildungsklasse wird dadurch nichts ausgesagt, außer daß $m > 0$ sein muß, wenn $s \neq 0$ ist. Der für diese letzte Frage ebenso wie überhaupt für das Verhalten der Fixpunkte bei Deformation einer Abbildung entscheidende Begriff wurde von J. Nielsen [Acta math. **50**, 289 (1927)] eingeführt: Zwei Fixpunkte gehören zur selben Fixpunktklasse (Fkl.), wenn sie bei einer der „überlagernden“ Abbildungen der universellen Überlagerung auf sich gleichzeitig als Fixpunkte erscheinen, oder m. a. W., wenn sie sich durch eine Kurve verbinden lassen, die zusammen mit ihrem Bild eine zusammenziehbare geschlossene Kurve ergibt. Auch die Zahl der Fixpunkte für jede Fkl. läßt sich nach Reidemeister [Math. Ann. **112**, 586—593 (1936); dies. Zbl. **13**, 369] kombinatorisch berechnen. Die einzelnen wesentlichen Fkl., d. h. diejenigen mit von Null verschiedener Fixpunktzahl, lassen sich bei Deformation der Abbildung mitverfolgen, und die Fixpunktzahl einer jeden erweist sich dabei als invariant. Es können also nicht Fixpunkte verschiedener Klassen bei einer Deformation der Abbildung in einen einzigen verschmelzen; ist μ die Zahl der wesentlichen Fkl., so ist sicher $m \geq \mu$. Nun erhebt sich die Frage, ob jedenfalls die Fixpunkte jeder einzelnen Fkl. durch geeignete Deformation der Abbildung zum Zusammenfallen gebracht werden können. Dann wäre, wie bereits Nielsen im zweidimensionalen Fall vermutete, $m = \mu$, und das Fixpunktproblem, soweit es als solches für die ganzen Abbildungsklassen gestellt wird, wäre damit zu einem gewissen Abschluß gebracht. Das Hauptergebnis des Verf. ist in der Tat die Bejahung dieser Frage unter recht allgemeinen Voraussetzungen über das zugrunde gelegte Polyeder, insbesondere für alle mindestens dreidimensionalen homogenen Polyeder. Leider bleibt die Frage für zweidimensionale Flächen noch offen. — Der vorliegende Teil I der Arbeit enthält die Definition der Fkl. für gewisse Teilbereiche des Polyeders, insbesondere für die Fkl., und den Nachweis der Invarianz bei Deformation der Abbildung. Zu dem Zweck werden „benachbarte“ Abbildungen betrachtet und die wesentlichen Fkl. bei solchen miteinander in Beziehung gesetzt, wie das bereits von Nielsen getan wurde. Bemerkenswerterweise ist es aber im allgemeinen nicht möglich, die Fkl. bei zwei beliebigen Abbildungen derselben Abbildungsklasse ohne Auszeichnung einer speziellen Deformation der einen in die andere sinnvoll einander zuzuordnen.

Wolfgang Franz (Frankfurt a. M.).

Brödel, Walter: Fortgesetzte Untersuchungen über Deformationsklassen bei mehrdeutigen topologischen Abbildungen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **91**, 229—260 (1939).

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **12**, 374 und **18**, 426) wird die Frage untersucht, wann zwei Überlagerungsflächen der Torusfläche, die endlich vielblättrig und in endlich vielen Punkten relativ verzweigt sind, durch stetige Bewegung ihrer Windungspunkte ineinander transformiert werden können. Es wird gezeigt, daß eine solche Überlagerungsfläche auf eine Normalform zurückgeführt werden kann, die mit Hilfe gewisser, relativ unverzweigter Überlagerungsflächen F_0, F_1, \dots, F_p der Torusfläche aufgebaut wird. Notwendig und hinreichend, damit zwei Flächen der betrachteten Klasse im obigen Sinn äquivalent sind, ist Übereinstimmung der Blätterzahl n , des Geschlechts p und der Hilfsflächen F_r . *Rolf Nevanlinna.*

Samelson, Hans: Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten. Comment. math. helv. **13**, 144—155 (1941).

E. Cartan bewies [Enseignement Math. **35**, 177—200 (1936); dies. Zbl. **15**, 204] mit Hilfe seiner Theorie der Integralinvarianten, daß für jede geschlossene Gruppenmannigfaltigkeit mit einer Dimension ≥ 3 die 3. Bettische Zahl nicht verschwindet.

Daraus folgert man, daß die 1- und die 3-dimensionale Sphäre die einzigen Sphären sind, welche als Gruppenmannigfaltigkeiten auftreten können. Für den letzten Satz gibt der Verf. einen neuen, einfacheren, ohne Integralinvarianten operierenden Beweis; er zeigt genauer, daß als Gruppenmannigfaltigkeiten vom Charakter einer Homologiesphäre nur die 1- und 3-dimensionale Sphäre und der 3-dimensionale projektive Raum auftreten (und zwar treten diese auf als multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1, als multiplikative Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1 und als multiplikative Gruppe der homogenen Quaternionen). Der Beweis benutzt Faserungseigenschaften der Gruppenmannigfaltigkeit. *Wolfgang Franz* (Frankfurt a. M.).

Hopf, Heinz: Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen. *Comment. math. helv.* **13**, 119—143 (1941).

Wie Verf. in *Ann. of Math.* **42** (1941) gezeigt hat, ist der Homologiering einer geschlossenen Lieschen Gruppe G dimensionstreu isomorph dem Homologiering eines topologischen Produktes von l Sphären. Der Rang λ der Gruppe wird definiert als die maximale Dimension einer abelschen Untergruppe. Nach Cartan ist $l = \lambda$. Dieses wird neu bewiesen, indem gezeigt wird, daß der Abbildungsgrad der Abbildung $p_k(x) = x^k$ einerseits gleich k^l , andererseits gleich k^λ ist; dabei ist k eine beliebige ganze Zahl. Die erste Behauptung wird ausschließlich mit Homologiebetrachtungen bewiesen. Die zweite beruht darauf, daß die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^k = q$ in der Gruppe G in der Regel gleich k^λ ist. Im Anschluß daran wird bewiesen: Jedes Element von G gehört einer maximalen abelschen Untergruppe T_λ von G an. Alle solchen Untergruppen T_λ haben dieselbe Dimension λ und sind zusammenhängend. Der Normalisator eines beliebigen Elementes a ist die Vereinigung aller Untergruppen T_λ , welche a enthalten. In der Regel gibt es nur ein solches T_λ ; die darstellende Matrix A von a in der adjungierten Gruppe hat dann die Zahl $+1$ als λ -fache charakteristische Wurzel. In Spezialfällen kann sich die Vielfachheit um eine gerade Zahl erhöhen. Die Lösungen der Gleichung $x^k = q$ gehören entweder alle einem T_λ an und ihre Anzahl ist k^λ , oder sie bilden eine mindestens 2-dimensionale Menge. *van der Waerden*.

Whyburn, G. T.: Non-alternating interior retracting transformations. *Ann. of Math.*, II. s. **40**, 914—921 (1939).

Eine stetige Abbildung $f(S) = R$ heißt retrahierend, wenn $R \subset S$ ist und $f(x) = x$ für jeden Punkt x aus R ; eine stetige Abbildung $T(A) = B$ heißt eine innere Abbildung, wenn sie jede offene Teilmenge von A auf eine offene Teilmenge von B abbildet; sie heißt nichtalternierend, wenn für keine zwei Punkte x, y aus B die Menge $T^{-1}(x)$ zwei Punkte der Menge $T^{-1}(y)$ in A trennt. Verf. gibt Bedingungen an dafür, daß ein lokal zusammenhängendes Kontinuum K durch eine Abbildung der im Titel angegebenen Art abgebildet werden kann auf einen Bogen B (mit Endpunkten a und b) oder auf eine einfach geschlossene Kurve G . Für das erste ist notwendig und hinreichend, daß K gleich der zyklischen Kette $C(a, b)$ in K ist (also gleich der Summe aller Teilbogen von K mit den Endpunkten a und b); für das letzte, daß K zyklisch ist (d. h. zu je zwei Punkten eine sie enthaltende, einfache geschlossene Kurve enthält) und nicht unikohärent ist über G [Definition siehe W. A. Wilson, *Amer. J. Math.* **55**, 135—145 (1933), dies. Zbl. **6**, 83]. *Nöbeling* (Erlangen).

Hall, D. W., and G. T. Whyburn: Arc- and tree-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **48**, 63—71 (1940).

Die Arbeit kann als Weiterführung einer früheren von Whyburn [*Amer. J. Math.* **58**, 305—312 (1936); dies. Zbl. **14**, 40] betrachtet werden. Bezeichnungen: Stets sei A ein lokal zusammenhängendes (kompaktes, metrisches) Kontinuum, ferner T eine eindeutige und stetige Abbildung. Es heiße T bogen- bzw. baumerhaltend, wenn bei T jeder einfache Bogen aus A auf einen einfachen Bogen oder einen Punkt aus $T(A)$ abgebildet wird bzw. jeder Baum aus A auf einen Baum aus $T(A)$. Eine α -Menge aus A ist eine abgeschlossene Teilmenge von A , welche mit zwei Punkten b_1, b_2 jeden in A gelegenen und b_1 mit b_2 verbindenden einfachen Bogen enthält. Zyklische Kette

zwischen p_1 und p_2 aus A ist der Durchschnitt aller p_1 und p_2 enthaltenden a -Mengen. Schließlich werde T als a -Mengen umkehrend bezeichnet, wenn für jeden Punkt b aus $T(A)$ das Urbild $T^{-1}(b)$ entweder ein Punkt oder eine a -Menge ist. Wichtigste Ergebnisse: I. Ist $T(A)$ zyklisch (d. h. frei von Zerlegungspunkten), so sind folgende Abbildungstypen äquivalent: bogen-, baumerhaltend, a -Mengen umkehrend, „monotone retracting“ (wegen der letzteren Bezeichnung siehe die Arbeit selbst). — II. Damit T bogenerhaltend sei, ist notwendig und hinreichend, daß T baumerhaltend ist und jede zyklische Kette auf eine zyklische Kette abbildet. Darin ist ein von R. G. Simond [Duke math. J. 4, 575—589 (1938); dies. Zbl. 19, 333] bewiesener Satz enthalten, für welchen die Verf. außerdem einen direkten, einfachen Beweis geben. — III. Ist T bogenerhaltend, so ist T a -Mengen umkehrend dann und nur dann, wenn 1. in A kein echtes zyklisches Element E existiert, dessen Bild ein freier Bogen in $T(A)$ ist, und 2. T auf der Menge $T(K)$ monoton (d. h. das Urbild eines jeden Punktes ist zusammenhängend) ist, wo K die Menge aller Zerlegungs- und Endpunkte von A ist. — Für eine Reihe weiterer Feststellungen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Haupt (Erlangen).

Nöbeling, Georg: Geometrische (Realitäts-) Ordnung und topologische Struktur. J. reine angew. Math. 183, 37—67 (1940).

S sei die Schar aller m -dimensionalen Ebenen des kartesischen Raumes R_k . A sei ein Kompaktum mit endlicher Dimension n , und f sei eine Einbettung von A in den Raum R_k , d. h. eine stetige Abbildung von A in R_k . Für jede Ebene C der Schar S bilde man das Urbild $f^{-1}(f(A) \cdot C)$ des Durchschnittes $f(A) \cdot C$. Sind alle diese Urbilder leer oder von endlicher Mächtigkeit, so hat A bei der Einbettung f eine endliche M -Ordnung bez. S . Sind die Mächtigkeiten der Urbilder sogar beschränkt und ist s ihr Maximum, so heißt A von beschränkter M -Ordnung oder von der M -Ordnung s bei der Einbettung f . Haben beliebig kleine Umgebungen der Punkte von A dieselbe M -Ordnung wie A selbst, so wird A von der total homogenen M -Ordnung s bei der Einbettung f genannt. Benutzt man in diesen Definitionen an Stelle von Mächtigkeiten Dimensionen, so gelangt man zu den Begriffen der endlichen, beschränkten, total homogenen D -Ordnung. Für den Fall $k > m + n$ wird nun bewiesen, daß es bei gegebenem A stets Einbettungen von beschränkter Ordnung $\leq s$ gibt, sobald s der Bedingung

$$s \geq \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n}$$

genügt. Dieses Ergebnis enthält den Einbettungssatz der Topologie als Spezialfall ($m = 0, s < 2$). Ist A in sich dicht, so gibt es sogar Einbettungen von der total homogenen Ordnung s , sofern s ganzzahlig ist und der obigen Bedingung genügt. Im Fall $k = m + n$ existieren nicht immer Einbettungen von beschränkter Ordnung. Wohl gibt es sie, wenn A ein Polyeder ist. Auch wird eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, die A erfüllen muß, damit folgendes gilt: Es gibt bei jeder Einbettung von A eine Zerlegung der Schar S in eine offene und dichte Teilschar S' und einen Rest T , derart, daß A eine endliche M -Ordnung bez. S' und die D -Ordnung 0 bez. T hat. Im Fall $k < m + n$ gibt es niemals eine Einbettung endlicher Ordnung, sondern die D -Ordnung einer jeden Einbettung (sogar in bezug auf die Schar aller zu einer gegebenen parallelen Ebenen) ist stets $\geq m + n - k$. Ist s allgemein irgendeine ganze Zahl $\geq m + n - k$ und $\leq n$ und ist die Menge der Punkte, in denen A eine Dimension $\geq s$ hat, in A dicht, so gibt es stets Einbettungen von der total homogenen D -Ordnung s bezüglich S . Die sämtlichen Einbettungen, deren Existenz in diesen Sätzen behauptet wurde, bilden in allen genannten Fällen eine überall dichte G_δ -Menge im vollständigen Raum aller Einbettungen. Im Fall $k \geq 2n + 1$ kann man die Einbettungen sogar als topologische Abbildungen erhalten. Die Konstruktion der Einbettungen geschieht auf Grund von Simplicialen und anderen Approximationen mit Hilfe von zwei Sätzen aus der algebraischen Geometrie, deren Beweise von v. d. Waerden beige-steuert wurden. Einer dieser Sätze besagt die Existenz einer algebraischen

Mannigfaltigkeit von der Dimension $k - m$ im projektiven Raum S_k , die von jeder m -dimensionalen Ebene in endlich vielen Punkten geschnitten wird. *van der Waerden*.

Alexandrov, P. S.: Berichtigung zur Arbeit von P. S. Alexandrov und V. V. Niemytzki: Der allgemeine Metrisationssatz und das Symmetrieaxiom. Rec. math. Moscou, N. s. 8, 519 (1940) [Russisch].

In einer Arbeit von Alexandroff und Niemytzki (dies. Zbl. 19, 235) ist ein kleiner Fehler, für den Alexandroff verantwortlich ist, übersehen worden. Die Ergebnisse der Arbeit werden davon keineswegs beeinflusst. Verf. gibt die richtige Form des betr. § 4 an.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Zaremba, S.: Réflexions sur les fondements de la mécanique rationnelle. Enseignement Math. 38, 59—69 (1940).

Verf. stellt nach euklidischer Art Definitionen und Axiome auf, auf denen sich dann die (klassische, nicht relativistische) Mechanik aufbauen läßt. Genauer sind diese Gedanken in einem Buch des Verf. über Mechanik (in polnischer Sprache) ausgeführt, dessen Erscheinen angekündigt wird.

G. Schrutka (Wien).

Batte, M. I.: Constrained oscillations in a system in the presence of hysteresis. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, Nr 3, 13—30 u. engl. Zusammenfassung 30 (1940) [Russisch].

The problem of constrained oscillations in a system with one degree of freedom is considered in the case of a sinusoidal disturbing force when the force of resistance and the elastic force can be assumed as proportional to the displacement. The author indicates an exact solution for the problem, and then finds also an approximated one by means of the Ritz-Galerkin method. Some results of experiments with a frictional damper are given for comparison.

Janczewski (Leningrad).

● **Stange, Kurt: Das Problem der Flugbahnberechnung.** Berlin: E. S. Mittler & Sohn 1940. IV, 61 S. u. 14 Abb. RM. 3.—

Dans cette brochure l'auteur expose un procédé de calcul numérique, par arcs successifs, des trajectoires d'un projectile dans une atmosphère de densité variable.

Le chemin proposé est le suivant: Soit à intégrer l'équation différentielle $\frac{dx'}{dt} = f(x', x)$ et supposons qu'on connaît les valeurs de x, x' et par conséquent de $f(x', x) = b$ pour $t = 0, \tau$ et 2τ . Soient $x_0, x'_0, b_0; x_1, x'_1, b_1; x_2, x'_2, b_2$ ces valeurs. On forme la fonction $b(t) = b_0 + \frac{b_1 - b_0}{\tau} t + \frac{b_2 - 2b_1 + b_0}{2\tau^2} t(t - \tau)$, où l'on a $b(0) = b_0, b(\tau) = b_1, b(2\tau) = b_2$,

et l'on pose $\frac{dx'}{dt} = b(t)$. En intégrant entre des limites 2τ et 3τ on obtient $x'_3 = x'_2 + \int_{2\tau}^{3\tau} b(t) dt$. On forme ensuite la fonction

$$x'(t) = x'_1 + \frac{x'_2 - x'_1}{\tau} (t - \tau) + \frac{x'_3 - 2x'_2 + x'_1}{2\tau^2} (t - \tau)(t - 2\tau),$$

où l'on a $x'(\tau) = x'_1, x'(2\tau) = x'_2, x'(3\tau) = x'_3$, et en intégrant entre des limites 2τ et 3τ on obtient

$$x_3 = x_2 + \int_{2\tau}^{3\tau} x'(t) dt,$$

ce que permet de calculer $b_3 = f(x'_3, x_3)$. On recommence les calculs avec $x_1, x'_1, b_1; x_2, x'_2, b_2; x_3, x'_3, b_3$ et l'on obtient les valeurs x_4, x'_4, b_4 , correspondantes à $t = 4\tau$ et ainsi de suite. La comparaison des valeurs de $\int_{2\tau}^{3\tau} b(t) dt$, et des expressions analogues, avec les valeurs correspondantes, tirées de l'équation différentielle, donne une idée de l'approximation obtenue. Pour obtenir des résultats, satisfaisant aux exigences du tir,

il faut, suivant l'estimation de l'auteur, prendre τ , différent dans les différentes parties de la trajectoire, de 0,5 à 4 seconds du temps, et calculer ainsi 26 arcs pour une trajectoire de 7 kilometres. La brochure contient des tables, facilitant les calculs.

Kyrylle Popoff (Sofia).

Elastizität, Akustik:

Scherman, D. J.: Sur la solution du second problème fondamental de la théorie statique plane de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 25—27 (1940).

Le second problème fondamental de l'élasticité dans le plan (recherche de l'équilibre, si les forces extérieures sont données le long du contour) se réduit à la recherche de deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ régulières dans le domaine donné S à partir des conditions limites

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C_j \quad \text{sur } L_j \quad (j = 1, 2, \dots, m+1);$$

$\overline{F(t)}$ désigne la quantité complexe conjuguée de $F(t)$, L_j sont les courbes fermées qui limitent le domaine, la fonction se détermine à partir des forces extérieures données, et les C_j sont des constants qu'il faut déterminer (nous pouvons supposer que $C_{m+1} = 0$). Les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ de la variable complexe s'expriment à l'aide d'une fonction $\omega(t)$ qui vérifie une équation intégrale de Fredholm. Le problème proposé admet une seule solution. Si le domaine S est à connexion simple on obtient un système de deux équations intégrales réelles [voir Lauricella, Acta math. 32 (1909)].

B. Hostinský (Brünn).

Scherman, D. J.: Problème mixte de la théorie statique de l'élasticité pour les domaines plans multiplement connexes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 28—31 (1940).

Le problème mixte de l'équilibre élastique dans le plan consiste en trouver les déformations, si les forces extérieures sont données sur une partie de la frontière L et les déplacements sur le reste de L . Supposons que la frontière L soit formée de $2n$ arcs l_k d'extrémités a_k et a_{k+1} ($k = 1, 2, \dots, 2n$; $a_{2n+1} = a_1$), et que les forces extérieures agissant sur les l_{2k-1} soient données tandis qu'on connaît les déplacements sur les l_{2k} ($k = 1, \dots, n$). Désignons les sommes $\sum_1^n l_{2k-1}$ et $\sum_1^n l_{2k}$ respectivement par

$L^{(1)}$ et $L^{(2)}$ et supposons qu'aucune des courbes L_j ($j = 1, \dots, m+1$) (dont l'ensemble constitue la frontière L) ne soit contenue complètement dans l'ensemble $L^{(1)}$. Les déformations s'expriment à l'aide de deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, analytiques dans le domaine envisagé S ; ces fonctions satisfont aux conditions limites

$$\delta\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C \quad \text{sur } L$$

avec $\delta = 1$ sur $L^{(1)}$ et $\delta = -k$ sur $L^{(2)}$; $C = C_{2k-1}$ sur l_{2k-1} et $= 0$ sur $L^{(2)}$, où C_{2k-1} sont des constantes. Enfin, la fonction $f(t)$ est déterminée par les déplacements données sur les l_k et par les forces extérieures. Pour trouver $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, l'auteur exprime ces deux fonctions au moyen d'une fonction auxiliaire $\omega(t)$ et il obtient comme résultat un système d'équations intégrales de Fredholm pour la définition de la fonction $\omega(t)$ sur toute la frontière L . Les valeurs de $\varphi(z)$ et de $\psi(z)$ s'en déduisent pour chaque point z à l'intérieur de S .

B. Hostinský (Brünn).

Lourye, A. I.: General theory of thin elastic shells. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, 7—33 u. engl. Zusammenfassung 33—34 (1940) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird die Biegetheorie der dünnen Schalen für kleine Verformungen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten entwickelt. Um den Rechnungsgang nicht zu unterbrechen und die benutzte Tensorsymbolik (Ricci-Kalkül) zu erläutern, werden zunächst die grundlegenden Sätze der mathematischen Elastizitätstheorie des dreidimensionalen Kontinuums und der Geometrie der Flächen und Schalen in nichtorthogonalen, krummlinigen Koordinaten sehr übersichtlich zusammengestellt. Sodann werden die Gleichungen für die Verzerrungen der Fläche (Änderungen in den Koeffizienten der ersten und zweiten quadratischen Form der Flächentheorie) und die Gauß-Codazzischen Gleichungen der deformierten Fläche entwickelt. Für Haupt-

krümmungslinien als Koordinatenlinien gehen die Verzerrungsgleichungen in die früher von Trefftz für diesen Fall gefundenen Gleichungen über. Im dritten Abschnitt wird die Statik der Schalen behandelt. Dabei werden die Schnittkräfte zunächst in allgemeiner Form, ohne Benützung der Kirchhoffschen Hypothese aufgeschrieben. Außerdem wird gezeigt, daß die homogenen Gleichgewichtsbedingungen der Schale (ohne äußere Kräfte) durch vier Spannungsfunktionen erfüllt werden können. Schließlich wird im vierten Abschnitt die Bernoulli-Kirchhoffsche Hypothese eingeführt und es werden für Hauptkrümmungslinien als Koordinatenlinien geschlossene Formeln für die Schnittkräfte aufgeschrieben. Zum Schluß weist der Verf. darauf hin, daß die Arbeit den vollständigen Rechnungsapparat auch zur Lösung der Stabilitätsaufgabe enthält.

Kromm (Adlershof).

Kiltehevsky, N.: Les équations fondamentales de l'équilibre des enveloppes élastiques et quelques méthodes de leur intégration. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 5, 73—96 u. franz. Zusammenfassung 97 (1940) [Ukrainisch].

Ce travail fait suite de la première partie (Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSSU 1940, Nr 4, 83; voir ce Zbl. 23, 411). L'auteur déduit dans la seconde partie, le système d'équations d'équilibre pour l'enveloppe élastique en partant des équations générales de l'équilibre élastique. Il étudie la question comment le système d'équations relatif à l'équilibre de l'enveloppe peut être obtenu par un certain passage aux valeurs moyennes dans les équations de l'équilibre élastique. Cette méthode se rattache à la meilleure représentation des fonctions (définies dans un intervalle donné), conformément au principe des moindres carrés.

B. Hostinský (Brünn).

Gran Olsson, R. and Eric Reissner: A problem of buckling of elastic plates of variable thickness. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 19, 131—139 (1940).

Eine Rechteckplatte, deren Seiten in festen Gelenken gelagert sind, wird auf ihren Seiten durch eine konstante Normalresultante P gedrückt. Da die Biegesteifigkeit als lineare Funktion der Längskoordinate vorausgesetzt wird, $B = cx$, vereinfacht sich die Differentialgleichung zu $\Delta(B\Delta w) + P\Delta w = 0$. Da die Randbedingungen auch in der Form $w = 0$ und $\Delta w = 0$ geschrieben werden können, wird mit der Abkürzung $\Delta w = v$ die Differentialgleichung 4. Ordnung auf die Differentialgleichung 2. Ordnung $\Delta(Bv) + Pv = 0$ mit der Randbedingung $v = 0$ zurückgeführt. Der Bernoullische Produktansatz $v = f(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$, worin b die Breite der Platte bedeutet, ergibt das 1. Teilintegral $f = e^{-\frac{n\pi x}{b}} F\left(1 - \frac{bP}{2n\pi c}, 2, \frac{2n\pi x}{b}\right)$. Ist das 1. Argument der hypergeometrischen Funktion $= 0, -1$ oder -2 , so wird das 2. Teilintegral durch die Lagrangesche Konstantenvariation berechnet und durch den Integrallogarithmus ausgedrückt. Nach den Randbedingungen muß die variierte Konstante an der unteren und oberen Grenze der Längskoordinate denselben Wert annehmen. Die Kurve für die variierte Konstante besteht aus 1, 2 bzw. 3 Zweigen zwischen Asymptoten senkrecht zur Abszissenachse. Demnach werden für die Knickresultanten $2\pi \frac{c}{b} P$, $4\pi \frac{c}{b} P$ und $6\pi \frac{c}{b} P$ aus der Kurve für die variierte Konstante die zugehörigen Längsbereiche der Platte als zur Abszissenachse parallele Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zweigen entnommen.

Ludwig (Hannover).

Leonov, M. J.: On the calculation of foundation plates. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, Nr 3, 81—97 u. engl. Zusammenfassung 98 (1940) [Russisch].

The author gives a formula for the pressure which will result in displacements of points within a circle on the surface of an elastic half solid with application to the case of bending of a plate resting on an elastic half solid. An approximate calculation follows based on the fact that the margin of error in determining the transversal force depends very little upon local inaccuracies in pressure.

Janczewski.

Schaehnasarow, A. I.: Die Gleichung, die die Perioden der Schwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt in einem speziellen Fall definiert. *J. appl. Math. a. Mech.*, N. s. 4, Nr 3, 119—121 u. dtsh. Zusammenfassung 122 (1940) [Russisch].

Es wird die Gleichung der Eigenfrequenzen der Schwingungen eines Stabes (in der Form eines abgestumpften Keiles, der am breiteren Ende befestigt ist) aufgestellt und eine angenäherte Abhängigkeit der Frequenzen von Parametern, welche die Form und das Material des Stabes charakterisieren, abgeleitet. *Janczewski* (Leningrad).

Hydrodynamik:

Petrov, G. I.: Application of Galerkin's method of the problem of stability of flow of a viscous liquid. *J. appl. Math. a. Mech.*, N. s. 4, Nr 3, 3—11 u. engl. Zusammenfassung 12 (1940) [Russisch].

Das Randwertproblem, auf das die obige Frage zurückgeführt wird (es erweist sich als nichtselbstadjungiert), wird nach der Methode von Galerkin untersucht, mittels des Konvergenzbeweises, der auf der Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten beruht. Hieraus wird die Stabilität der Strömung zwischen geradlinigen Wänden abgeleitet für den Fall einer linearen oder einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung.

Janczewski (Leningrad).

Ziller, Felix: Beitrag zur Theorie des Tragflügels von endlicher Spannweite. *Ing.-Arch.* 11, 239—259 (1940).

Die Bestimmung der Auftriebsverteilung eines vorgegebenen (zunächst starr gedachten) Tragflügels im Rahmen der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie wird als ein Problem der Variationsrechnung formuliert, zu dessen Lösung das Ritz'sche Verfahren benutzt wird. Auf diese Weise erhält man für die Koeffizienten A_n der nach bekannter Variablentransformation zulässigen Fourierentwicklung der Auftriebsverteilung ein lineares Gleichungssystem, dessen in Form bestimmter Integrale allgemein angebbare Beiwerte einerseits von der Flügelgestalt und den Profileigenschaften, andererseits lediglich von der Anstellwinkelverteilung abhängig sind. Nachdem als einfachstes Beispiel der elliptische Flügel mit konstantem Anstellwinkel durchgerechnet ist, folgen Ausführungen zur numerischen Ermittlung der erwähnten Beiwerte in allgemeineren Fällen unter Hervorhebung des Rechteckflügels und des Trapezflügels. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Methode (unter einer gewissen Einschränkung) auf die elastische Tragfläche übertragen, wobei in alle Beiwerte des resultierenden Gleichungssystems für die A_n eine vom statischen Aufbau des Flügels abhängige (entweder rechnerisch oder experimentell bestimmbare) Einflußfunktion eingeht. Als einschlägiges Beispiel wird der einholmige Rechteckflügel mit Torsionsröhre im einzelnen behandelt.

Harry Schmidt (Berlin).

Kochin, N. E.: Theory of a wing of finite span with circular form in plane. *J. appl. Math. a. Mech.*, N. s. 4, 3—32 u. engl. Zusammenfassung 32 (1940) [Russisch].

Daß wir diesen Beitrag zu der bereits von W. Kinner [*Ing.-Arch.* 8, 47 (1937)] behandelten Theorie einer durch $z = \zeta(x, y)$ gegebenen Kreistragfläche (Geschwindigkeit c in Richtung der positiven x -Achse; Gleichung der Projektion S auf die x, y -Ebene $x^2 + y^2 = a^2$) etwas ausführlicher referieren können, verdanken wir einer von Herrn Kurt Schröder für uns angefertigten Übersetzung des russischen Textes.

In § 1 wird die Problemstellung (vgl. dies. Zbl. 23, 280) unter Zugrundelegung des Geschwindigkeitspotentials $\varphi(x, y, z)$ der Störungsströmung in allen Einzelheiten klar formuliert. Ergebnis: die für $z > 0$ überall reguläre Potentialfunktion φ muß, wenn Σ den unendlichen Halbstreifen $x^2 + y^2 > a^2$, $x < 0$, $|y| < a$, $z = 0$ bedeutet und E den von $S + \Sigma$ verschiedenen Teil der Ebene $z = 0$ bezeichnet, den Bedingungen

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_S = -c \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1a) \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_\Sigma = 0, \quad (1b) \quad [\varphi(x, y, z)]_E = 0 \quad (1c)$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

genügen. Ihre Ableitungen müssen an der Hinterkante $k_1(x^2 + y^2 = a^2, x < 0, z = 0)$ beschränkt sein, dagegen in der Umgebung der Vorderkante $k_2(x^2 + y^2 = a^2, x > 0, z = 0)$ sich im allgemeinen wie $\delta^{-1/2}$ verhalten, unter δ den Abstand des Aufpunkts (x, y, z) von k_2 verstanden. — In § 2 wird φ mit Hilfe einer verallgemeinerten Greenschen Funktion $K(x, y, z; \xi, \eta)$, für die nach einer Methode von A. Sommerfeld [Proc. London Math. Soc. (1) 28, 395 (1897)] ein geschlossener Ausdruck hergeleitet wird, in der Form

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \iint_{(S)} \{K(x, y, z; \xi, \eta) + H(x, y, z; \xi, \eta)\} \cdot f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2)$$

dargestellt; dabei bedeutet $f(x, y)$ eine auf S beliebig erklärte Ortsfunktion mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, während der aus K gewonnene Zusatzkern H bewirkt, daß zunächst $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ bei Annäherung an k_1 endlich bleibt. Diese Funktion (2) erfüllt dann alle zuvor angeführten Forderungen mit Ausnahme der Konturbedingung (1a). Für die zugehörige Tragfläche ergibt sich die Formel

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{c} \cdot \int_0^x f(\xi, y) d\xi - \frac{x}{c} \cdot g(y) + g_1(y),$$

in der $g(y)$ durch eine Integralbeziehung mit $f(x, y)$ zusammenhängt, während $g_1(y)$ willkürlich bleibt. Um bei bekanntem $\zeta(x, y)$ die Funktion $g(y)$ und damit zugleich $f(x, y) = c \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g(y)$ zu bestimmen, leitet Verf. eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art her, ohne jedoch zu erörtern, ob ihr Kern den Bedingungen der Fredholmschen Theorie genügt; ihre numerische Behandlung dürfte jedenfalls mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein. — Nachdem in § 3 die Berechnung der Zirkulationsverteilung im Band der freien Wirbel und damit der Luftkräfte sowie ihrer Momente bei bekanntem $f(x, y)$ erledigt ist, werden in § 4 die mit kleinem α gebildeten Beispiele $f(x, y) = c \cdot \alpha$; $f(x, y) = -2c \cdot \alpha \cdot x$; $f(x, y) = c \cdot \alpha \cdot y$

behandelt. Dabei ergeben sich für den Auftrieb bzw. induzierten Widerstand z. T. unerklärlich große Abweichungen (53 bzw. 134%, 8,7 bzw. 9,4%, \div bzw. 131%) gegenüber den entsprechenden Werten der Traglinientheorie.

Harry Schmidt u. Hans Schubert (Berlin).

Optik:

● Carathéodory, C.: Elementare Theorie des Spiegelteleskops von B. Schmidt. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 28.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1940. 36 S. u. 7 Abb. RM. 4.—

Das Schmidtsche Teleskop besteht aus einem Kugelspiegel und einer dünnen Zusatzlinse oder -platte, durch die das aus dem Unendlichen kommende Licht hindurchgeht, bevor es auf den Spiegel fällt. Die Linse steht im Mittelpunkt des Spiegels, ihre dem Spiegel zugekehrte Fläche ist so deformiert, daß achsenparallel einfallendes Licht streng vereinigt wird. Es ist dann ein Gesichtsfeld von 15° zu erhalten, freilich ist es nicht eben, sondern eine zur Spiegelfläche konzentrische Kugel. B. Strömgren hat die Theorie des Teleskops mit Hilfe der Seidelschen Fehlerausdrücke gegeben (vgl. dies. Zbl. 11, 188). Carathéodory wendet ein ganz elementares Verfahren (Durchrechnung) an. Er nimmt zunächst eine Zusatzplatte mit ebener Außenfläche an, der Brennpunkt soll durch sie nicht geändert werden. Nimmt man die Achse des Instruments zur Z-Achse, den Kugelmittelpunkt zum Koordinatenanfang und setzt den Kugelhalbmesser 1, so ergibt sich (§ 10) für die Meridiankurve der Innenfläche die Reihenentwicklung $(n-1)z = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{8}x^6 + \frac{45}{64}x^8 + \dots$. C. leitet sodann eine genaue Darstellung von x und z durch einen Parameter ab (§ 14) und bemerkt, daß

es sich um eine Kurve 10. Ordnung handle. Indessen wird weiter gezeigt, daß innerhalb einer schon wegen des Farbenfehlers ausreichenden Genauigkeit die Reihenentwicklung genügt, gleichzeitig werden noch für einige Hilfsgrößen Reihen abgeleitet (§ 20). Darauf wird die Abweichung eines schief einfallenden Parallelstrahlenbündels untersucht (§ 22—36). C. zeigt, daß die Fehler 3. Ordnung verschwinden und von denen 5. Ordnung nach Schwarzschilds Bezeichnung die sphärische Abweichung 2. Stufe und der Flügelfehler (s. § 42) vorhanden sind. Setzt man die Brennweite des Spiegels f , die Öffnung d , die Neigung des Strahlenbündels (es möge senkrecht zur Y -Achse einfallen) α , so hat (§ 34) ein in dem Punkte $x = \frac{d}{2} \varrho \cos \varphi$, $y = \frac{d}{2} \varrho \sin \varphi$ die Blende treffender Strahl in erster Annäherung die Abweichungen $\xi = f \left(\frac{d}{4f} \right)^3 \alpha^2 \varrho^3 \left(\frac{2n+1}{n} + 2 \cos^2 \varphi \right) \cos \varphi$ und $\eta = f \left(\frac{d}{4f} \right)^3 \alpha^2 \varrho^3 \left(\frac{1}{n} + 2 \cos^2 \varphi \right) \sin \varphi$. Für $\varrho = \text{konst.}$ ergeben sich „lemniskatenartige“ Kurven. C. untersucht noch die Lichtverteilung in einem den vorhandenen Ausführungen etwa entsprechenden Falle. Er betrachtet dann die Wirkung der Abschattung, die der Träger der lichtempfindlichen Schicht hervorbringen muß, seine Ergebnisse (§ 37) sind unter der stillschweigenden Annahme abgeleitet, daß für den größten Wert von α gilt $d = 4f\alpha$. Allgemein wäre in Gleichung (37,1) statt $\left(\frac{d}{4f} \right)^3 \alpha^2$ zu lesen α^5 , und (37,2) zu schreiben $\varepsilon = - \frac{4f^2 \alpha^2 \xi_0}{d^2 - 4f^2 \alpha^2}$. Für das Schmidtsche Musterobjektiv erhalte ich daher als Wert der durch die Abschattung entstehenden Verzeichnung statt 4'' nur 2,3''. — Schmidt hat bei seinem Teleskop die Außenfläche der Linse nicht eben, sondern schwach sammelnd gemacht; es ist ihm dadurch gelungen, den Farbenfehler auf den 4. Teil herabzudrücken. C. deutet die Theorie dieses ausgeführten Instrumentes an und macht darauf aufmerksam, daß zugleich die Lichtverteilung bei Abbildung eines schief einfallenden Strahlenbündels bedeutend besser wird (§ 41). Er macht zum Schluß noch Bemerkungen über die zweckmäßige Ausführung. Im Vorwort finden sich Zusätze zu einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 17, 382).

Hans Boegehold (Jena).

Atomphysik.

Kristallbau und fester Körper:

Fowler, R. H., and E. A. Guggenheim: Statistical thermodynamics of super-lattices. Proc. roy. Soc., Lond. A 174, 189—206 (1940).

Zur Behandlung der thermodynamischen Statistik von Überstrukturen wird die Methode des quasichemischen Gleichgewichts eingeführt. Das ganze Gitter sei in zwei Teilgitter, a - und b -Plätze aufgespalten. Die a -Plätze haben nur b -Plätze als nächste Nachbarn und umgekehrt. Das ganze Gitter ist von zwei Arten von Atomen A und B besetzt. $[A/a, B/b]$ bedeute die Zahl der Paare AB im Gitter, bei denen das A -Atom auf einem a -Platz, das B -Atom auf einem b -Platz sitzt. Die quasichemische Methode besteht nun in der Annahme, daß

$$[A/a, B/b][B/a, A/b] = e^{2\chi/kT} \cdot [A/a, A/b][B/a, B/b].$$

2χ ist die erforderliche Arbeit, um zwei AB -Paare durch ein AA - und ein BB -Paar zu ersetzen. Der Exponentialfaktor begünstigt Konfigurationen mit Paaren geringerer Energie in einer Art, die für das chemische Dissoziationsgleichgewicht charakteristisch ist. Es wird gezeigt, daß die Bethesche Methode zur Behandlung von Überstrukturen in ihrer ersten Näherung mit der quasichemischen Methode äquivalent ist. Die letztere Methode ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Bindung zwischen irgendeinem Paar nächster Nachbarn so behandelt werden kann, als ob dieses Paar ein chemisches Molekül wäre, und die Zahl der Anordnungen mit gegebener Zahl von Bin-

dungen eine solche, als ob sich die Bindungen gegenseitig nicht stören würden. Diese Methode sollte auch auf kompliziertere Gittertypen erfolgreich anwendbar sein.

J. Meixner (Berlin).

Brinkman, H. C.: On the theory of liquids. Physica, Haag 7, 747—752 (1940).

Unter Zugrundelegung des Eyringschen Begriffes des freien Volumens, das einem Teilchen in der Flüssigkeit zur Verfügung steht, wird eine Differenzengleichung für die freie Energie in Abhängigkeit von der Teilchenzahl aufgestellt. Daraus ergibt sich die Kompressibilität. In sie geht nur ein Parameter, das Volumen b der Moleküle im Zustand dichtester Packung, ein. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist bis zu Drucken von 1000—1500 at. gut, für b ergibt sich nahezu derselbe Wert, den Van Wijk und Seeder aus ihrer Theorie der inneren Reibung abgeleitet haben.

J. Meixner (Berlin).

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Kotani, Masao, Ayao Amemiya and Tuneto Simose: Tables of integrals useful for the calculations of molecular energies. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 20, 1—70 (1938).

Der vorliegende erste Teil einer Zusammenstellung von Funktionentafeln enthält Hilfsfunktionen, auf die sich die Integrale zurückführen lassen, die in den Näherungsrechnungen vom Heitler-Londonschen Typus für zweiatomige Molekeln auftreten (so genannte Coulomb-, Austausch-, Ionen-Integrale). Die Zahlentafeln geben an

$$A_n(\alpha) = \int_1^{\infty} e^{-\alpha\lambda} \lambda^n d\lambda,$$

$$B_n(\alpha) = \int_{-1}^1 e^{-\alpha\mu} \mu^n d\mu,$$

$$-E_i(-\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

$$f_r(m, \alpha) = \int_1^{\infty} Q_r(\lambda) e^{-\alpha\lambda} \lambda^m d\lambda,$$

$$W_r^v(m, n; \alpha) = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} Q_r^v(\lambda_+) P_r^v(\lambda_-) e^{-\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)} \lambda_1^m \lambda_2^n (\lambda_1^2 - 1)^{\frac{v}{2}} (\lambda_2^2 - 1)^{\frac{v}{2}} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

$$G_r^v(m; \alpha) = \int_{-1}^1 e^{-\alpha\mu} P_r^v(\mu) \mu^m (1 - \mu^2)^{\frac{v}{2}} d\mu,$$

$$F_{k, mn}(\alpha, \beta) = \int_1^{\infty} \int_{-1}^1 e^{-\alpha\lambda - \beta\mu} \frac{(\lambda^2 - 1)^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}} \lambda^m \mu^n d\lambda d\mu,$$

worin P_r^v und Q_r^v die in den Entwicklungen für $\frac{1}{r_{12}}$ auftretenden Kugelfunktionen sind, und λ_+ die größere, λ_- die kleinere der Zahlen λ_1 und λ_2 ist. *F. Hund* (Leipzig).

Bijl, A.: The lowest wave function of the symmetrical many particles system. Physica, Haag 7, 869—886 (1940).

Das gewöhnliche Schema der Störungsrechnung, Entwicklung nach Potenzen des Störungsparameters, führt bei der Schrödingergleichung eines nichtidealen Gases mit Bose-Statistik für den tiefsten Zustand zu einer Entwicklung, bei der das Größenverhältnis der höheren zu den niedrigeren Gliedern mit der Zahl der Teilchen zunimmt. Eine Entwicklung des Logarithmus der Eigenfunktion zeigt diese Schwierigkeit nicht. Die so berechnete Eigenfunktion des Grundzustandes zeigt keine Dichteschwankungen. Damit werden einige Eigenschaften des Energiespektrums des Vielteilchensystems und des flüssigen He II verknüpft.

F. Hund (Leipzig).

Nagamiya, Takeo: Statistical mechanics of one-dimensional substances. 1. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 705—720 (1940).

Für jeden Aggregatzustand der eindimensionalen Substanz wird ein besonderes Modell zugrunde gelegt. Im Gaszustand sollen sich die Moleküle wie starre Kugeln verhalten; im flüssigen Zustand kommt dazu noch eine konstante Anziehungskraft, während für den festen Zustand mit elastischen Kräften gerechnet wird. In jedem der drei Fälle wird die Verteilungsfunktion nach der klassischen und nach der Quantenstatistik berechnet. Anschließend Betrachtungen über das Phasengleichgewicht.

J. Meixner (Berlin).

Somenzi, Vittorio: Sopra l'interazione elettrodinamica di due elettroni e la teoria di Welker della superconduttività. (*Ist. di Fis., Univ., Milano.*) Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 11, 656—658 (1940).

Welker hat zur Erklärung der Supraleitfähigkeit der Metalle angenommen, daß in der ersten Brillouinschen Zone der Metallelektronen eine Lücke von der Größenordnung kT_c sei, wo T_c die kritische Temperatur der Supraleitfähigkeit ist. Zur Rechtfertigung dieser Hypothese hat er die Annahme gemacht, daß die Austauschenergie zweier freier Elektronen im Metall von der gleichen Größenordnung sein könne wie die klassische Wechselwirkungsenergie und dies mit einer Art Flüssigkeitsmodell der Metallelektronen begründet. Der Verf. gibt an, daß er für eine lineare Kette von Atomen mit der Blochschen Methode nachgerechnet habe, daß die Austauschenergie in der Tat von der Größenordnung der klassischen Wechselwirkungsenergie sein kann. Ausführliche Veröffentlichung wird angekündigt.

Bechert (Gießen).

Relativistische Quantentheorie:

Belinfante, F. J.: On the quantum theory of wave fields. *Physica*, Haag 7, 765—778 (1940).

Es wird ein allgemeiner Beweis der Lorentzinvarianz der kanonischen Feldquantisierung gegeben. Zuerst wird die Differentiation nach q -Zahlen untersucht. Sei $f(q)$ eine Funktion der q , wo $[q_i, q_k] \neq 0$, dann ist die Variation von f gleich $\delta f = \delta q \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q} \delta q$. $\frac{\partial f}{\partial q}$ braucht nicht gleich $\frac{\partial f}{\partial q}$ zu sein. Beide Größen sind eindeutig bestimmt, falls die Variationen δq mit den Vertauschungsrelationen (V.R.) der q verträglich sind. Man nimmt an, daß die Feldgleichungen aus einer Lagrangefunktion $L = L\left(q, \frac{\partial q}{\partial x_\mu}\right)$ folgen. Die zu q_i konjugierten Impulse sind $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Diejenigen q_i , für die $p_i \neq 0$, heißen kanonische Variable p_e, q_e . Die nichtkanonischen Variablen sollen eliminierbar sein. Falls dies möglich ist, folgen die kanonischen Gleichungen $\frac{\delta H}{\delta p_e} = \dot{q}_e$, $\frac{\delta H}{\delta q_e} = -\dot{p}_e$. Diese Bewegungsgleichungen sind auch eine Folge der V.R. Ihre relativistische Invarianz wird bewiesen, indem das Verhalten bei infinitesimalen Transformationen studiert wird.

M. Fierz (Basel).

Markow, M.: Über das „vierdimensional-ausgedehnte“ Elektron in dem relativistischen Quantengebiet. *J. Physics Acad. Sci. USSR* 2, 453—476 (1940).

La théorie du champ électromagnétique quantifié proposée autrefois par l'auteur [voir Zbl. 22, 186 (1940)] est exposée en détail. Soit $A(x)$ une grandeur du champ à l'événement $x(=x_1 x_2 x_3 x_4)$ et soit $A(x) = \sum_k (A_k^+ e^{i(k, x)} + A_k^- e^{-i(k, x)})$ sa décomposition en ondes planes. Les opérateurs A_k^\pm satisfont alors, en plus des relations de commutation de l'électrodynamique de Heisenberg et Pauli, à la relation suivante:

$$A_k^\pm f(x) = f(x - ikr_0^2) A_k^\pm,$$

f est une fonction de x seulement, k est le quadrivecteur d'onde d'une onde plane. Cette relation est identique à celle donnée dans la référence mentionnée. r_0 est une longueur fondamentale. En plus du champ A , l'auteur suppose l'existence d'un champ

A^* , tous deux étant des opérateurs hermitiens. Les opérateurs correspondants $(A_k^\pm)^*$ satisfont à la relation donnée ci-dessus avec $-i$ substitué pour i . — L'opérateur de l'énergie du champ est alors considéré comme étant bilinéaire en A^* et A . Ceci le rend identique à celui de Heisenberg et Pauli, c'est-à-dire à $\sum_k \hbar \nu_k (N_k + \frac{1}{2})$. Celui de l'interaction avec la matière, par contre, contient A , s'il opère sur Ψ , et A^* , s'il opère sur Ψ^* . Ψ étant la fonction de Schrodinger dépendant des N_k ($=$ nombre des quanta dans l'onde k) et des coordonnées \vec{q} des particules présentes. On vérifie facilement que l'Hamiltonienne du système „champ + matière“ devient identique à celle de Scherzer (voir Zbl. 20, 330). v. Stueckelberg (Basel).

Sokolow, A.: Quantum theory of emission of elementary particles. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 415—417 (1940).

Mittels der quantentheoretischen Störungsrechnung wird die Lichtemission eines Elektrons berechnet, das sich in einem Medium vom Brechungsindex n bewegt. Bei kräftefreier Bewegung findet nur dann eine Ausstrahlung statt, wenn die Geschwindigkeit $v > \frac{c}{n}$ ist. Die Frequenz ω eines Lichtquants, dessen Wellenzahlvektor mit dem Impuls p des Elektrons den Winkel θ einschließt, erfüllt die Beziehung $\cos \theta = \frac{c}{vn} + \frac{\hbar n}{2cp} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \omega$. Die in den Frequenzbereich $d\omega$ ausgestrahlte Energie ist

$$J(\omega) d\omega = \frac{e^2 \omega}{v c^2} d\omega \left\{ 1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} - \frac{\hbar \omega}{p v} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\omega^2 \hbar^2}{4 p^2 c^2 n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right\}.$$

Für $\hbar = 0$ stimmen diese Ergebnisse mit den klassischen überein [Frank und Tamm, C. R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)]. M. Fierz (Basel).

Stueckelberg, E. C. G.: Influence du champ pseudoscalaire sur la théorie classique des forces d'échange. Helv. phys. Acta 13, 347—354 (1940).

Møller und Rosenfeld [Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 17, H. 8 (1940)] haben die Meinung ausgesprochen, daß die Divergenzen der Mesontheorie verringert werden durch Einführen eines Pseudoskalarfeldes neben dem Vektorfeld. Dabei soll für die Wechselwirkung mit den schweren Teilchen der Kemmersche Ansatz [Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 354 (1938)] gemacht werden. Es wird nun die aus diesem Ansatz folgende Wechselwirkung zwischen den schweren Teilchen näher untersucht. Es zeigt sich, daß die Konvergenz der Störungsrechnung nicht wesentlich besser wird, indem das Kräftepotential in 3. Näherung von derselben Größenordnung wird wie das 1. Näherung, falls die Teilchen Abstände der Größe der Reichweite der Kernkräfte besitzen. Mathematisch ergeben sich allerdings ziemliche Vereinfachungen. Es ist bemerkenswert, daß der Spin der schweren Teilchen und ihre Ladungsvariablen („isotoper Spin“) symmetrisch in den Formeln auftreten. M. Fierz (Basel).

Iwanenko, D.: Classical theory of the scattering of mesons. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 411—414 (1940).

Mit Hilfe der Greenschen Funktion der Gleichung $(\square - k_0^2)f = 0$ kann das neutrale Mesonfeld eines oszillierenden „Nuclons“ (Proton, Neutron) berechnet werden. Nimmt man an, daß die Oszillation durch Einwirkung des Mesonfeldes selbst entsteht, so erhält man Streuquerschnitte. Das „Nuclon“ wird unrelativistisch behandelt. Insbesondere erhält man für hohe Frequenzen des Mesonfeldes für den quasimagnetischen Streuquerschnitt $\sigma_{\text{mag}} = \frac{8\pi}{3} (m_0 \kappa)^2 \frac{\nu^2}{c^4}$. Dabei ist $m_0 \kappa$ das quasimagnetische Moment.

Der Querschnitt wächst mit wachsender Frequenz ν an, was mit dem quantenmechanischen Resultat übereinstimmt. Die Strahlungsdämpfung ist dabei nicht berücksichtigt. Nimmt man diese mit, so verhalten sich alle Streuquerschnitte bei hohen Frequenzen wie $\frac{1}{\nu^3}$. Es wird weiter eine nichtlineare Verallgemeinerung der Theorie angedeutet. M. Fierz (Basel).